Niedersächsisches
Kultusministerium

Kerncurriculum
für das Gymnasium
Schuljahrgänge 5 - 10

Mathematik

Niedersachsen

An der Erarbeitung des Kerncurriculums für das Unterrichtsfach Mathematik in den Schuljahrgängen 5 – 10 des Gymnasiums waren die nachstehend genannten Personen beteiligt:

Edmund Kronabel, Papenburg
Ulf-Hermann Krüger, Syke
Dr. Jörg Meyer, Hameln
Sabine Meyer, Rotenburg/W.
Kirsten Stahl, Oldenburg

Wissenschaftliche Beratung:
Prof. Dr. Jürg Kramer, Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. Reinhard Oldenburg, Goethe-Universität Frankfurt

Die Ergebnisse des gesetzlich vorgeschriebenen Anhörungsverfahrens sind berücksichtigt worden.

Herausgegeben vom Niedersächsischen Kultusministerium (2013)
Schiffgraben 12, 30159 Hannover

Druck:
Unidruck
Weidendamm 19
30167 Hannover

Das Kerncurriculum sowie die ergänzenden Materialien können als „PDF-Datei“ vom Niedersächsischen Bildungsserver (NIBIS) unter http://www.cuvo.nibis.de heruntergeladen werden.

Inhalt Seite

1 Bildungsbeitrag

Unsere Kultur entwickelt unterschiedliche Zugänge, die Welt zu verstehen; diese sind nicht wechselseitig ersetzbar. Ein Zugang wird durch die Denkweise der Mathematik eröffnet. Schülerinnen und Schüler können in der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen – über die Aneignung lebensnützlicher Inhalte hinaus – eine zeitgemäße Allgemeinbildung erwerben. Dabei besteht der Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung im Wesentlichen aus folgenden Aspekten:

Mathematik verbirgt sich in vielen Phänomenen der uns umgebenden Welt. Schülerinnen und Schüler können den mathematischen Gehalt alltäglicher Situationen und Phänomene wahrnehmen, verstehen und unter Nutzung mathematischer Gesichtspunkte beurteilen. Indem sie Mathematik als nützliche und brauchbare Wissenschaft mit Anwendungen in vielen Bereichen erleben, kann die Mathematik ihnen Orientierung in einer zunehmend technisierten und ökonomisierten Welt bieten. Dazu gehört auch, ökologische, ökonomische, soziale und politische Zusammenhänge nachhaltiger Entwicklung unter Verwendung mathematischer Begriffe und Methoden zu beschreiben, wechselseitige Abhängigkeiten zu erkennen und Wertmaßstäbe für eigenes Handeln sowie ein Verständnis für gesellschaftliche Entscheidungen zu entwickeln.

Die Mathematik bzw. die mathematische Erkenntnisgewinnung ist eine kulturelle Errungenschaft, die historisch gewachsen ist. Mathematische Begriffe und Methoden entwickelten sich an Fragestellungen und Problemen, die auch an gesellschaftliche und praktische Bedingungen gebunden sind. Mathematik lässt sich nicht mit einem abgeschlossenen Wissenskanon erfassen, sondern steht vielmehr für lebendiges und phantasievolles Handeln, das auf menschlicher Kreativität beruht. Schülerinnen und Schüler erfahren Mathematik als ein Werkzeug zur Beschreibung der Umwelt und bekommen Einblick in die Bedeutung der Mathematik für die kulturelle Entwicklung.

Mathematikunterricht fördert grundlegende intellektuelle Fähigkeiten, die über das Fach hinaus von Bedeutung sind wie z. B. Ordnen, Verallgemeinern, Abstrahieren, folgerichtiges Denken. Daneben fördert mathematisches Handeln durch Erkunden von Zusammenhängen, Entwickeln und Untersuchen von Strukturen, Argumentieren und Systematisieren die allgemeine Handlungskompetenz. Weiterhin erschließen sich Schülerinnen und Schüler einen Wahrnehmungs- und Urteilshorizont, der über die Alltagsvorstellungen hinausgeht und die Kritikfähigkeit und die Beurteilungskompetenz fördert.

Der mathematische Unterricht leistet einen Beitrag zur Entwicklung der Persönlichkeit und der Sozialkompetenz, indem die Schülerinnen und Schüler im Lernprozess Verantwortung für sich und andere übernehmen und die Bedeutung ihres mathematischen Handelns erfahren. Dadurch entwickelt sich Selbstvertrauen in die eigenen mathematischen Kompetenzen sowie Interesse und Neugier an mathematikhaltigen Phänomenen. Kommunikations- und Kooperationsfähigkeit werden durch gemeinschaftliches Arbeiten an mathematischen Fragestellungen und Problemen gefördert.

2 Kompetenzorientierter Unterricht

Im Kerncurriculum des Faches Mathematik werden die Zielsetzungen des Bildungsbeitrags durch verbindlich erwartete Lernergebnisse konkretisiert und als Kompetenzen formuliert. Dabei werden im Sinne eines Kerns die als grundlegend und unverzichtbar erachteten fachbezogenen Kenntnisse und Fertigkeiten vorgegeben.

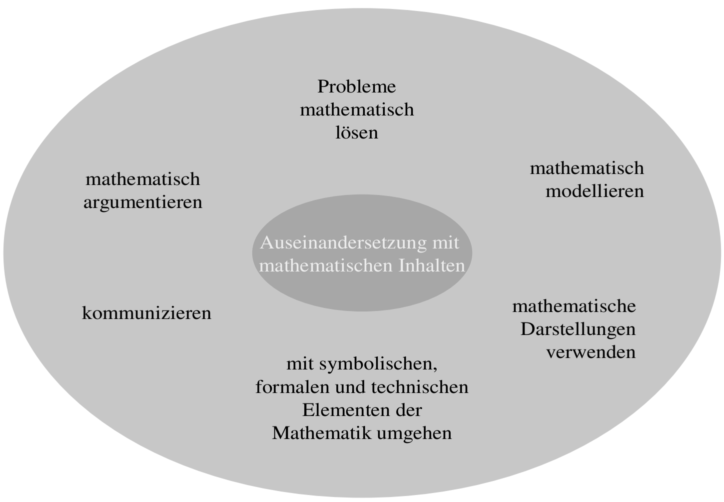
Kompetenzen weisen folgende Merkmale auf:

- Sie zielen ab auf die erfolgreiche und verantwortungsvolle Bewältigung von Aufgaben und Problemstellungen.
- Sie verknüpfen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten zu eigenem Handeln. Die Bewältigung von Aufgaben setzt gesichertes Wissen und die Beherrschung fachbezogener Verfahren voraus sowie die Bereitschaft und Fähigkeit, diese gezielt einzusetzen.
- Sie stellen eine Zielperspektive für längere Abschnitte des Lernprozesses dar.
- Sie sind für die persönliche Bildung und für die weitere schulische und berufliche Ausbildung von Bedeutung und ermöglichen anschlussfähiges Lernen.

Die erwarteten Kompetenzen werden in Kompetenzbereichen zusammengefasst, die das Fach strukturieren. Aufgabe des Unterrichts im Fach Mathematik ist es, die Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler anzuregen, zu unterstützen, zu fördern und langfristig zu sichern. Dies gilt auch für die fachübergreifenden Zielsetzungen der Persönlichkeitsbildung.

2.1 Kompetenzbereiche

Die Bewältigung mathematischer Problemsituationen erfordert ein Zusammenspiel verschiedener mathematischer Prozesse, die auf mathematische Inhalte ausgerichtet sind. Von zentraler Bedeutung im Unterricht sind die prozessbezogenen Kompetenzen, die in der Auseinandersetzung mit konkreten mathematischen Inhalten erworben werden, wobei die inhaltsbezogene Konkretisierung auf vielfältige Weise möglich ist. Dieser Sachverhalt wird in Übereinstimmung mit den von der Kultusministerkonferenz verabschiedeten Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss durch folgende Grafik dargestellt:



2.1.1 Prozessbezogene Kompetenzbereiche

Mathematisch argumentieren

Das Argumentieren hebt sich vom Informationsaustausch bzw. dem intuitiven Entscheiden vor allem durch den Wunsch nach Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit ab. Beim Argumentieren in außermathematischen Situationen geht es vor allem um das Rechtfertigen von Modellannahmen, das Interpretieren von Ergebnissen, das Bewerten der Gültigkeit oder der Nützlichkeit eines Modells und das Treffen von Entscheidungen mithilfe des Modells. Beim Argumentieren in innermathematischen Situationen spricht man allgemein vom Begründen und je nach Strenge auch vom Beweisen.

Das Argumentieren umfasst ein breites Spektrum von Aktivitäten: vom Erkunden von Situationen, Strukturieren von Informationen, Fragen stellen, Aufstellen von Vermutungen, Angeben von Beispielen und Plausibilitätsbetrachtungen, über das schlüssige (auch mehrschrittige) Begründen bis hin zum formalen Beweisen. Hierbei kommen unterschiedliche Abstufungen zum Tragen: vom intuitiven Begründen durch Verweis auf Plausibilität oder Beispiele bis zum mehrschrittigen Beweisen durch Zurückführen auf gesicherte Aussagen. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln Einsicht in die Notwendigkeit allgemeingültiger Begründungen von Vermutungen.

Probleme mathematisch lösen

Anforderungen an Abstraktion, Folgerichtigkeit und Exaktheit bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen schulen in besonderem Maße das systematische und logische Denken sowie das kritische Urteilen. Die Schülerinnen und Schüler werden zunehmend befähigt, mathematische Probleme selbstständig zu identifizieren und zu bearbeiten. Sie können so Vertrauen in ihre Denkfähigkeit erlangen. Dazu müssen sie über solides Grundwissen, vielfältige Fertigkeiten und Fähigkeiten verfügen und diese flexibel anwenden. Bei der Bearbeitung von Problemen können Schülerinnen und Schüler erfahren, dass Anstrengungsbereitschaft und Durchhaltevermögen erforderlich sind, um zu Lösungen zu gelangen.

Mathematisch modellieren

Realsituationen können durch Modellierung einer mathematischen Bearbeitung zugänglich gemacht werden. Das Modellieren umfasst: Idealisieren und Vereinfachen der Realsituation, Schätzen, Festlegen von Annahmen, Übersetzen in mathematische Begriffe und Strukturen sowie das Arbeiten in dem gewählten Modell. Darüber hinaus müssen die Ergebnisse interpretiert und in der Realsituation geprüft werden. Der Reflexion und Beurteilung sowie gegebenenfalls der Variation des verwendeten mathematischen Modells im Hinblick auf die Realsituation kommt dabei eine besondere Bedeutung zu.

Die Schülerinnen und Schüler erfahren, dass Ergebnisse von Modellierungsprozessen zum Erstellen von Prognosen und als Grundlage für Entscheidungen genutzt werden. Außerdem entwickeln die Schülerinnen und Schüler ein kritisches Bewusstsein gegenüber Aussagen und Behauptungen, die auf Modellannahmen basieren.

Mathematische Darstellungen verwenden

Mathematisches Arbeiten erfordert das Anlegen und Interpretieren von Darstellungen und den jeweils angemessenen Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen. Zu den Darstellungsformen gehören Texte und Bilder; Tabellen, Graphen und Terme; Skizzen, Grafiken und Diagramme sowie Figuren, die geometrische, stochastische oder logische Zusammenhänge veranschaulichen. Technische Hilfsmittel unterstützen einen flexiblen Umgang mit mathematischen Darstellungen.

Eigene Darstellungen dienen dem Strukturieren und Dokumentieren individueller Überlegungen und unterstützen die Argumentation. Der flexible Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen erleichtert das Verständnis von Sachzusammenhängen. Insbesondere bei der Präsentation von Ergebnissen erfahren die Schülerinnen und Schüler die Bedeutung von Darstellungen als Kommunikationsmittel.

Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Problemstellungen und Lösungen werden in der Regel in natürlicher Sprache dargestellt, die mathematische Bearbeitung erfolgt dagegen meistens in symbolischer und formaler Sprache. Komplexe Sachverhalte können in formaler Sprache eindeutig und prägnant dargestellt und so einer mathematischen Bearbeitung zugänglich gemacht werden. Der Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen umfasst strategische Fähigkeiten, die zielgerichtetes und effizientes Bearbeiten von mathematischen Problemstellungen ermöglichen. Dazu müssen angemessene Verfahren und Werkzeuge ausgewählt, angewendet und bewertet werden.

Kommunizieren

Kommunizieren über mathematische Zusammenhänge beinhaltet, Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse zu dokumentieren, verständlich darzustellen und zu präsentieren.

Dazu müssen die Schülerinnen und Schüler Äußerungen von anderen und Texte zu mathematischen Inhalten verstehen und überprüfen. Schülerinnen und Schüler nehmen mathematische Informationen und Argumente auf, strukturieren Informationen, erläutern mathematische Sachverhalte und verständigen sich darüber mit eigenen Worten und unter Nutzung angemessener Fachbegriffe. Sie strukturieren und dokumentieren ihren Arbeitsprozess sowie ihre Lernwege und Ergebnisse, wobei sie mündliche und unterschiedliche schriftliche mathematische Darstellungsformen nutzen.

Die Schülerinnen und Schüler geben ihre Überlegungen verständlich weiter, prüfen und bewerten Argumentationen. Dabei gehen sie konstruktiv mit Fehlern und Kritik um. Sie arbeiten kooperativ und bewerten Teamarbeit.

2.1.2 Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche

Zahlen und Operationen

Zahlen sind Bestandteil des täglichen Lebens. Sie dienen dazu, Phänomene aus der Umwelt zu quantifizieren und zu vergleichen. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln ein grundlegendes Verständnis von Zahlen, Variablen, Rechenoperationen, Umkehrungen, Termen und Formeln. Sie wählen, beschreiben und bewerten Vorgehensweisen und Verfahren, denen Algorithmen bzw. Kalküle zu Grunde liegen.

Größen und Messen

Zählen und Messen dienen dazu, Phänomene aus der Umwelt zu quantifizieren und zu vergleichen. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln ein grundlegendes Verständnis vom Prinzip des Messens und wenden dieses zur Orientierung, zur Durchdringung lebensweltlicher Probleme und zur Begründung von Formeln an. Weiterhin bauen die Schülerinnen und Schüler eine tragfähige Vorstellung vom Grenzwertbegriff auf.

Raum und Form

Die Untersuchung geometrischer Objekte und der Beziehungen zwischen ihnen dient der Orientierung im Raum und ist Grundlage für Konstruktionen, Berechnungen und Begründungen. Bei der Beschäftigung mit Geometrie spielen ästhetische Aspekte eine besondere Rolle. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln ihr räumliches Vorstellungsvermögen weiter. Hierbei steht der handelnde und ästhetische Aspekt vor dem rechnerischen Lösen von Aufgaben. Zum Erwerb geometrischer Kompetenzen ist ein sinnvoller Wechsel zwischen dem Herstellen, dem Beschreiben, dem Darstellen und dem Berechnen geometrischer Objekte wichtig.

Funktionaler Zusammenhang

Funktionen sind ein zentrales Mittel zur mathematischen Beschreibung quantitativer Zusammenhänge. Mit ihnen lassen sich Phänomene der Abhängigkeit und der Veränderung von Größen erfassen und analysieren. Funktionen eignen sich für Modellierungen für eine Vielzahl von Realsituationen. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln ein tragfähiges Verständnis von funktionalen Abhängigkeiten.

Daten und Zufall

Beschreibende Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilende Statistik werden bei der Untersuchung der zufälligen Erscheinungen der uns umgebenden Welt verknüpft.

Dabei beginnt stochastisches Arbeiten mit der Ermittlung von Daten durch Befragungen, Experimente und Beobachtungen. Die Darstellung von Rohdaten in Diagrammen sowie deren Auswertung mit Lage- und Streumaßen geht mit einer Informationsreduktion einher.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden Modelle entworfen und untersucht, die die beobachteten zufälligen Vorgänge beschreiben und insbesondere Prognosen in Form von absoluten Häufigkeiten ermöglichen sollen.

Die Frage, ob das gewählte Modell geeignet ist, die beobachtete Realität gut zu beschreiben, wird in der beurteilenden Statistik untersucht. Als Bindeglied zwischen der Sachebene und der Modellebene wirkt das Gesetz der großen Zahlen.

Die Schülerinnen und Schüler erwerben durch Zufallsexperimente in verschiedenen Ausprägungen, insbesondere durch Simulationen, ein Verständnis für das Wechselspiel zwischen Daten und Wahrscheinlichkeiten (d.h. zwischen Realität und Modell). Simulationen ermöglichen zudem einen Zugang zu Problemen, die mit den zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln noch nicht lösbar sind.

2.2 Kompetenzentwicklung

Die Beschreibungen der prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen stellen den Lernprozess in den Vordergrund. Der Aufbau der Kompetenzen ist dabei eng verbunden mit übergreifenden Zielen zur Entwicklung der Persönlichkeit und des sozialen Lernens wie der Kooperationsfähigkeit, der Fähigkeit zur Organisation des eigenen Lernens und der Bereitschaft, seine Fähigkeiten verantwortungsvoll einzusetzen.

Das Lernen von Mathematik erfolgt nicht durch die Übernahme einer fein gegliederten Kette von Gedanken und Wissenspartikeln. Es besteht vielmehr im fortlaufenden Knüpfen und Umstrukturieren eines flexiblen Netzes aus inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen. Dabei sind es die Lernenden selbst, die ausgehend von ihren Alltagsvorstellungen, Vorerfahrungen und Anschauungen ihre Kompetenznetze von verschiedenen Stellen aus aktiv-entdeckend und lokal ordnend weiterentwickeln. Die intuitiv vorhandenen Präkonzepte werden bewusst aufgegriffen und für die Entwicklung mathematischer Begriffe und Verfahren in altersangemessener Weise genutzt. Abstraktionen geschehen bewusst schrittweise und sachangemessen.

Der kumulative Kompetenzaufbau stellt eine zentrale Herausforderung des Mathematikunterrichtes dar. Bereits erworbene Kompetenzen müssen in wechselnden Problemsituationen flexibel verfügbar sein und kontinuierlich erweitert werden. Eine bewusste Fokussierung des Unterrichts auf die verpflichtend zu erwerbenden Kompetenzen sowie eine altersgemäße Reduzierung der Komplexität unterstützen die Kompetenzentwicklung. Lücken an einer Stelle des Kompetenznetzes sind oft ein Hindernis für den späteren Ausbau des Netzes an anderer Stelle. Um diesem Problem zu begegnen, werden im Unterrichtsverlauf an geeigneter Stelle durch Rückgriffe Lerngelegenheiten angeboten, in denen vorhandene Kompetenzen vertieft oder noch nicht erworbene Kompetenzen nun erworben und mit aktuellen Kompetenzen vernetzt werden.

Lerninhalte werden durch geeignete **Wiederholungen** und **Übungen** aus dem Kontext der Erstbegegnung gelöst und an geeigneten Stellen des gesamten Mathematikunterrichts geübt. Regelmäßige Kopfübungen sind ein bewährter, sinnvoller Weg. Übungs- und Wiederholungsphasen sollten über den aktuellen Lernbereich hinaus vernetzend sein.
Durch die Konzentration auf die verpflichtend zu erwerbenden Kompetenzen kann der vermeintlichen Stofffülle begegnet und ausreichend Zeit für notwendige Übungs- und Wiederholungsphasen geschaffen werden.

Grundlage für einen erfolgreichen Auf- und Ausbau des Kompetenznetzes sind Fertigkeiten im flüssigen und flexiblen Umgehen u.a. mit Zahlen, Größen und geometrischen Objekten. Nach wie vor ist der sichere Umgang mit Termen und Termumformungen mit und ohne Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge von grundlegender Bedeutung.

Schülerinnen und Schüler können mathematisches Verständnis nur ausbilden, wenn im Unterricht sorgfältig und langfristig angelegte inhaltliche Vorstellungen zu mathematischen Begriffen und Verfahren aufgebaut werden. Beispielhaft seien der Funktionsbegriff und das Begründen hervorgehoben:

Funktionen sind zentral zur mathematischen Erfassung quantitativer Zusammenhänge. Mit Funktionen lassen sich Phänomene der Abhängigkeit und der Veränderung von Größen erfassen und analysieren. Funktionen eignen sich für Modellierungen für eine Vielzahl von Alltagssituationen.

Für ein vertieftes Verständnis des Funktionsbegriffs sind die Behandlung der Vielfalt der Darstellungsformen und insbesondere der Wechsel zwischen ihnen bedeutsam. Dabei braucht die Abstraktionsleistung der Schülerinnen und Schüler beim Übergang von sprachlichen oder bildlichen Beschreibungen zur Funktionsgleichung besondere Beachtung und Unterstützung. Die abstrakten Darstellungsformen sind an den verständigen Gebrauch der Variablen gebunden.

Schülerinnen und Schüler in den Schuljahrgängen 5 und 6 haben ein statisches Variablenverständnis und betrachten funktionale Zusammenhänge lokal. Sie sehen Variable in Termen und Gleichungen als Platzhalter für konkrete Zahlen an und argumentieren mithilfe von passenden Einsetzungen. Der Übergang zu einem dynamischen Variablenverständnis ist nicht trivial und für die Schülerinnen und Schüler mit kognitiver Anstrengung verbunden. Er wird deshalb besonders gesichert und vielfältig geübt. Variable sollen auch mit sachlogischen Wörtern und Buchstaben bezeichnet werden. Erst in späteren Schuljahrgängen erfassen die Schülerinnen und Schüler den Kovariationsaspekt und betrachten funktionale Zusammenhänge global. Dann werden die Betrachtung der funktionalen Aspekte und Repräsentationen und das Lösen von Gleichungen stets verzahnt.

Begründungen stellen zunächst Beziehungen her zwischen dem zu Begründenden und dem schon Bekannten. Erst aus wissenschaftspropädeutischer Sicht erhalten Begründungen eine wahrheitssichernde Funktion.

Aus Sicht der Schülerinnen und Schüler ist ein Begründungsbedarf nur gegeben, wenn der Sachverhalt überraschend und nicht unmittelbar einsichtig ist. Die Frage „Hätten wir uns das nicht gleich denken können?“ kann zur Begründung herausfordern. Dadurch setzen die Schülerinnen und Schüler die ihnen bekannten Sachverhalte in Beziehung und ordnen sie lokal.

Begründungen erwachsen aus Argumentationen. Dabei verschaffen nicht die kürzesten Wege am meisten Einsicht. Viel wichtiger ist die Dichte des Beziehungsgeflechts, so dass es mitunter sinnvoll ist, Sachverhalte von mehreren Seiten zu betrachten. Im Idealfall zeigen sich dann weitere und unerwartete Vernetzungen, die zu weiterführenden Einsichten führen.

Die Aussagekraft einer mathematischen Argumentation ist nicht abhängig vom Grad ihrer Formalisierung oder Abstraktion. Beim Begründen im Mathematikunterricht spielt deshalb die Anschaulichkeit eine große Rolle, um die Argumente für die Schülerinnen und Schüler nachvollziehbar und überzeugend zu machen.

Der Ertrag der Lernprozesse ist auch davon abhängig, inwieweit die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler in der Organisation und der Gestaltung des Unterrichts berücksichtigt werden. Die eigenständige Bewältigung von individuell als schwierig empfundenen Problemen bewirkt in der Regel eine Motivationssteigerung. Unterschiedliche Zugänge ermöglichen den Lernerfolg für unterschiedliche Lernertypen.

Wesentliche Prozesse beim **Kompetenzaufbau** werden durch konkrete **Aufgaben** gesteuert, die prozess- und inhaltsbezogene Kompetenzen miteinander verknüpfen. Angemessen offene und komplexe Aufgaben ermöglichen Schülerinnen und Schülern mathematische Zusammenhänge zu entdecken und Begriffe selbst zu entwickeln, an Alltags- und Vorerfahrungen anzuknüpfen und individuelle Lernwege zu beschreiten. Fehler und Irrwege werden als neue Lernanlässe genutzt.

Aufgaben zum Kompetenznachweis sind auf eine möglichst ökonomische und objektive Erfassung von individuellen Leistungen ausgerichtet. Die Schülerinnen und Schüler weisen bei ihrer Bearbeitung nach, welche Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten sie besitzen und wie sie diese einsetzen, um unbekannte Probleme zu lösen. Geeignete Aufgaben zum Kompetenznachweis stellen entsprechend klare und differenzierte Anforderungen und beschränken sich nicht nur auf das schematische und kalkülhafte Abarbeiten von Verfahren. Art und Inhalt der Aufgabenstellungen entsprechen dem unterrichtlichen Vorgehen, dabei werden prozessbezogene und inhaltsbezogene Kompetenzbereiche gleichberechtigt erfasst. Die Aufgaben spiegeln die Vielfalt der im Unterricht erworbenen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten wider und beinhalten sowohl eingeübte Verfahren als auch variantenreich gestaltete bekannte oder abgewandelte Fragestellungen. Dabei werden durch geeignete Fragestellungen auch vorher erworbene Kompetenzen getestet.

Es werden drei Anforderungsbereiche unterschieden:

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

Dieser Anforderungsbereich umfasst die Wiedergabe und direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang.

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen

Dieser Anforderungsbereich umfasst das Bearbeiten bekannter Sachverhalte, indem Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten verknüpft werden, die in der Auseinandersetzung mit Mathematik auf verschiedenen Gebieten erworben werden.

Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren

Dieser Anforderungsbereich umfasst das Bearbeiten komplexer Gegebenheiten u. a. mit dem Ziel, zu eigenen Problemformulierungen, Lösungen, Begründungen, Folgerungen, Interpretationen oder Wertungen zu gelangen.

2.3 Innere Differenzierung

Aufgrund der unterschiedlichen Lernvoraussetzungen, der individuellen Begabungen, Fähigkeiten und Neigungen sowie des unterschiedlichen Lernverhaltens sind differenzierende Lernangebote und Lernanforderungen für den Erwerb der vorgegebenen Kompetenzen unverzichtbar. Innere Differenzierung als Grundprinzip in jedem Unterricht zielt auf die individuelle Förderung der Schülerinnen und Schüler ab. Dabei werden Aspekte wie z. B. Begabungen und motivationale Orientierungen, Geschlecht, Alter, sozialer, ökonomischer und kultureller Hintergrund, Leistungsfähigkeit und Sprachkompetenz berücksichtigt.

Aufbauend auf einer Diagnose der individuellen Lernvoraussetzungen unterscheiden sich die Lernangebote z. B. in ihrer Offenheit und Komplexität, dem Abstraktionsniveau, den Zugangsmöglichkeiten, den Schwerpunkten, den bereitgestellten Hilfen und der Bearbeitungszeit. Geeignete Aufgaben zum Kompetenzerwerb berücksichtigen immer das didaktische Konzept des Unterrichtsfaches. Sie lassen vielfältige Lösungsansätze zu und regen die Kreativität von Schülerinnen und Schülern an.

Vor allem leistungsschwache Schülerinnen und Schüler brauchen zum Erwerb der verpflichtend erwarteten Kompetenzen des Kerncurriculums vielfältige Übungsangebote, um bereits Gelerntes angemessen zu festigen. Die Verknüpfung mit bereits Bekanntem und das Aufzeigen von Strukturen im gesamten Kontext des Unterrichtsthemas erleichtern das Lernen.

Für besonders leistungsstarke Schülerinnen und Schüler werden Lernangebote bereitgestellt, die deutlich über die als Kern an alle Schülerinnen und Schüler bereits gestellten Anforderungen hinausgehen und einen höheren Anspruch haben. Diese Angebote dienen der Vertiefung und Erweiterung und lassen komplexe Fragestellungen zu.

Innere Differenzierung fordert und fördert fächerübergreifende Kompetenzen wie das eigenverantwortliche, selbstständige Lernen und Arbeiten, die Kooperation und Kommunikation in der Lerngruppe sowie das Erlernen und Beherrschen wichtiger Lern- und Arbeitstechniken. Um den Schülerinnen und Schülern eine aktive Teilnahme am Unterricht zu ermöglichen, ist es vorteilhaft sie in die Planung des Unterrichts einzubeziehen. Dadurch übernehmen sie Verantwortung für den eigenen Lernprozess. Ihre Selbstständigkeit wird durch das Bereitstellen vielfältiger Materialien und durch die Möglichkeit eigener Schwerpunktsetzungen gestärkt.

Um die Selbsteinschätzung der Schülerinnen und Schüler zu fördern, stellt die Lehrkraft ein hohes Maß an Transparenz über die Lernziele, die Verbesserungsmöglichkeiten und die Bewertungsmaßstäbe her. Individuelle Lernfortschritte werden wahrgenommen und den Lernenden regelmäßig zurückgespiegelt. Im Rahmen von Lernzielkontrollen gelten für alle Schülerinnen und Schüler einheitliche Bewertungsmaßstäbe.

2.4 Zum Einsatz von Medien

Die kontinuierliche Entwicklung eines reflektierten Umgangs mit digitalen Medien ist Aufgabe jedes Unterrichtsfaches und ist im Medienkonzept der Schule verankert.

In der Auseinandersetzung mit Medien eröffnen sich den Schülerinnen und Schülern erweiterte Möglichkeiten der Wahrnehmung, des Verstehens und Gestaltens. Eine bewusste Nutzung der Medienvielfalt erfordert Strategien der Informationssuche und Informationsprüfung wie das Erkennen und Formulieren des Informationsbedarfs, das Identifizieren und Nutzen unterschiedlicher Informationsquellen, das Identifizieren und Dokumentieren der Informationen sowie das Prüfen auf thematische Relevanz, sachliche Richtigkeit und Vollständigkeit. Durch analytische und produktive Annäherungen erfahren die Schülerinnen und Schüler, dass Medienprodukte Ergebnisse eines Gestaltungsprozesses sind und dass Wirkung und Einfluss der Medien kritisch bewertet und eingeschätzt werden müssen. Medien unterstützen die individuelle und aktive Wissensaneignung, fördern selbstgesteuertes, kooperatives und kreatives Lernen sowie die Fähigkeit, Aufgaben und Problemstellungen selbstständig und lösungsorientiert zu bearbeiten. Derartige Strategien sind Elemente zur Erlangung übergreifender Methodenkompetenz.

Im Mathematikunterricht werden ab dem 5. Schuljahrgang in altersangemessener Weise und sachadäquatem Umfang zunehmend digitale Mathematikwerkzeuge wie Programme zur graphischen Darstellung, Tabellenkalkulationsprogramme, Dynamische Geometriesoftware (DGS), Computer-Algebra-Systeme (CAS) und gegebenenfalls weitere Software sowie das Internet genutzt.

Die digitalen Mathematikwerkzeuge unterstützen den Aufbau von Kompetenzen, indem sie gezieltes Experimentieren und Entdecken neuer Sachverhalte ermöglichen, zu Fragen anregen und die Selbstständigkeit und Kreativität der Schülerinnen und Schüler fördern. Sie dienen sowohl der Überprüfung eigener Lösungen als auch dem Erkenntnisgewinn, zum Beispiel durch Explorieren, Experimentieren und Simulieren. Der Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge erweitert einerseits die Erfahrungsbasis und ermöglicht andererseits unterschiedliche Lösungswege durch die Anwendung von graphischen, tabellarischen, numerischen und symbolischen Methoden.

Um Kompetenzen langfristig aufzubauen, ist eine angemessene Balance zwischen hilfsmittelfreiem Arbeiten und der Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge erforderlich. Nach wie vor werden für grundlegende Verfahren wie zum Beispiel Termumformungen und Gleichungslösen hilfsmittelfreie Routinen entwickelt und durch regelmäßige Übungs- und Wiederholungsphasen gesichert.

Chancen und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge bedürfen somit einer kritischen Reflexion.

Art und Leistungsumfang der digitalen Mathematikwerkzeuge, die den Schülerinnen und Schüler sowohl im Unterricht als auch bei Hausaufgaben und bei Leistungsüberprüfungen zur Verfügung stehen sollen, werden in einem gesonderten Erlass geregelt.

3 Erwartete Kompetenzen

Die erwarteten Kompetenzen lassen sich den folgenden Kompetenzbereichen zuordnen:

prozessbezogene Kompetenzbereiche	inhaltsbezogene Kompetenzbereiche
• Mathematisch argumentieren • Probleme mathematisch lösen • Mathematisch modellieren • Mathematische Darstellungen verwenden • Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen • Kommunizieren	• Zahlen und Operationen • Größen und Messen • Raum und Form • Funktionaler Zusammenhang • Daten und Zufall

In den Abschnitten 3.1 und 3.2 werden zu jedem Kompetenzbereich die verbindlich erwarteten Kompetenzen in tabellarischer Form dargestellt; die horizontale Anordnung bildet den kumulativen Kompetenzaufbau ab. Abschnitt 3.3 zeigt beispielhaft eine sachlich sinnvolle Anordnung der Kompetenzen in Lernbereichen.

Es wird nur dann explizit sowohl auf den Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge als auch auf hilfsmittelfrei zu erwerbenden Kompetenzen hingewiesen, wenn Abgrenzungen deutlich werden sollen. Fehlen diese Hinweise ist der hilfsmittelfreie Erwerb der Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten intendiert.

Die erwarteten Kompetenzen legen Anforderungen fest, die die Schülerinnen und Schüler jeweils am Ende von Schuljahrgang 6, Schuljahrgang 8 und Schuljahrgang 10 erfüllen müssen. Sie sind grundlegend für zentrale Überprüfungen und deswegen teilweise auch sehr detailliert dargestellt. Für jeden Doppelschuljahrgang sind diejenigen erwarteten Kompetenzen aufgeführt, die zusätzlich zu denen der vorangehenden Doppelschuljahrgänge zu erwerben sind. Die in den Tabellen auftretenden Leerfelder bedeuten, dass die erwarteten Kompetenzen früherer Schuljahrgänge durch geeignete Übungen und Wiederholungen präsent zu halten sind und gegebenenfalls auf neue Inhalte übertragen werden.

Die vertikale Anordnung legt weder eine Rangfolge noch eine zeitliche Reihenfolge der unterrichtlichen Umsetzung fest. Wege, wie die Kompetenzen zu erreichen sind, werden nicht vorgegeben, insbesondere sind keine Unterrichtseinheiten determiniert.

Die erwarteten Kompetenzen sind als Regelanforderungen auf Grundlage von Stundentafel 1 formuliert. Bei einer abweichenden Verteilung der Stunden oder einer abweichenden Gesamtstundenzahl sind auf der Grundlage des Kerncurriculums von der Fachkonferenz Anpassungen vorzunehmen. Der Beginn des systematischen Aufbaus einer Kompetenz, Vertiefungen und Erweiterungen werden für jeden Schuljahrgang von der Fachkonferenz verabredet.

3.1 Prozessbezogene Kompetenzbereiche

3.1.1 Mathematisch argumentieren

am Ende von Schuljahrgang 6	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 8	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 10
Die Schülerinnen und Schüler …		
• stellen Fragen und äußern begründete Vermutungen in eigener Sprache.	• präzisieren Vermutungen und machen sie einer mathematischen Überprüfung zugänglich, auch unter Verwendung geeigneter Medien.	
• bewerten Informationen für mathematische Argumentationen.	• beschaffen sich notwendige Informationen für mathematische Argumentationen und bewerten diese.	
• erläutern einfache mathematische Sachverhalte, Begriffe, Regeln, Verfahren und Zusammenhänge mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen. • nutzen intuitive Arten des Begründens: Beschreiben von Beobachtungen, Plausibilitätsüberlegungen, Angeben von Beispielen oder Gegenbeispielen. • begründen mit eigenen Worten Einzelschritte in Argumentationsketten. • begründen durch Ausrechnen bzw. Konstruieren.	• erläutern mathematische Sachverhalte, Begriffe, Regeln, Verfahren und Zusammenhänge unter Zuhilfenahme formaler Darstellungen. • nutzen mathematisches und außermathematisches Wissen für Begründungen, auch in mehrschrittigen Argumentationen. • bauen Argumentationsketten auf und/oder analysieren diese. • begründen durch Zurückführen auf Bekanntes, Einführen von Hilfsgrößen oder Hilfslinien.	• erläutern präzise mathematische Zusammenhänge und Einsichten unter Verwendung der Fachsprache. • kombinieren mathematisches und außermathematisches Wissen für Begründungen und Argumentationsketten und nutzen dabei auch formale und symbolische Elemente und Verfahren. • bauen Argumentationsketten auf, analysieren und bewerten diese. • geben Begründungen an, überprüfen und bewerten diese.
• beschreiben, begründen und beurteilen ihre Lösungsansätze und Lösungswege. • vergleichen verschiedene Lösungswege, identifizieren, erklären und korrigieren Fehler.	• vergleichen und bewerten verschiedene Lösungsansätze und Lösungswege.	

3.1.2 Probleme mathematisch lösen

am Ende von Schuljahrgang 6	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 8	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 10
Die Schülerinnen und Schüler …		
• erfassen einfache vorgegebene inner- und außermathematische Problemstellungen, geben sie in eigenen Worten wieder, stellen mathematische Fragen und unterscheiden überflüssige von relevanten Größen.	• erfassen inner- und außermathematische Problemstellungen und beschaffen die zu einer Problemlösung noch fehlenden Informationen.	• stellen sich inner- und außermathematische Probleme und beschaffen die zu einer Lösung noch fehlenden Informationen.
• beschreiben und begründen Lösungswege.	• ziehen mehrere Lösungsmöglichkeiten in Betracht und überprüfen sie.	
• reflektieren und nutzen heuristische Strategien: Untersuchen von Beispielen, systematisches Probieren, Experimentieren, Zurückführen auf Bekanntes, Rückwärtsrechnen, Permanenzprinzip, Zerlegen und Zusammensetzen von Figuren, Nutzen von Invarianzen und Symmetrien, Analogisieren.	• reflektieren und nutzen heuristische Strategien: Spezialisieren und Verallgemeinern, Zerlegen in Teilprobleme, Substituieren, Variieren von Bedingungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Darstellungswechsel.	• wählen geeignete heuristische Strategien zum Problemlösen aus und wenden diese an.
• nutzen Darstellungsformen wie Tabellen, Skizzen oder Graphen zur Problemlösung. • wenden elementare mathematische Regeln und Verfahren wie Messen, Rechnen und einfaches logisches Schlussfolgern zur Lösung von Problemen an.	• nutzen Parametervariationen. • nutzen Darstellungsformen wie Terme und Gleichungen zur Problemlösung. • wenden algebraische, numerische, graphische Verfahren oder geometrische Konstruktionen zur Problemlösung an.	• nutzen die mittlere und lokale Änderungsrate zur Problemlösung.
• deuten ihre Ergebnisse in Bezug auf die ursprüngliche Problemstellung und beurteilen sie durch Plausibilitätsüberlegungen, Überschlagsrechnungen oder Skizzen. • identifizieren, beschreiben und korrigieren Fehler.	• beurteilen ihre Ergebnisse, vergleichen und bewerten Lösungswege und Problemlösestrategien. • erklären Ursachen von Fehlern.	

3.1.3 Mathematisch modellieren

am Ende von Schuljahrgang 6	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 8	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 10
Die Schülerinnen und Schüler …		
• beschreiben Modellannahmen in Sachaufgaben. • nutzen direkt erkennbare Modelle zur Beschreibung überschaubarer Realsituationen. • ordnen einem mathematischen Modell eine passende Realsituation zu.	• bewerten mögliche Einflussfaktoren in Realsituationen. • wählen Modelle zur Beschreibung überschaubarer Realsituationen und begründen ihre Wahl.	• wählen, variieren und verknüpfen Modelle zur Beschreibung von Realsituationen.
• verwenden geometrische Objekte, Diagramme, Tabellen, Terme oder Häufigkeiten zur Ermittlung von Lösungen im mathematischen Modell.	• verwenden Terme mit Variablen, Gleichungen, Funktionen oder Wahrscheinlichkeiten zur Ermittlung von Lösungen im mathematischen Modell.	
• überprüfen die im Modell gewonnenen Ergebnisse im Hinblick auf Realsituation und gegebenenfalls Abschätzung.	• interpretieren die im Modell gewonnenen Ergebnisse im Hinblick auf die Realsituation, reflektieren die Annahmen und variieren diese gegebenenfalls.	• analysieren und bewerten verschiedene Modelle im Hinblick auf die Realsituation.

3.1.4 Mathematische Darstellungen verwenden

am Ende von Schuljahrgang 6	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 8	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 10
Die Schülerinnen und Schüler …		
• nutzen unterschiedliche Darstellungsformen für rationale Zahlen.		
• stellen einfache, auch nicht durch Terme zu beschreibende Zuordnungen durch Tabellen oder Graphen dar, interpretieren und nutzen solche Darstellungen.	• stellen funktionale Zusammenhänge durch Tabellen, Graphen oder Terme dar, auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge, interpretieren und nutzen solche Darstellungen.	
• stellen einfache geometrische Sachverhalte algebraisch dar und umgekehrt.	• stellen geometrische Sachverhalte algebraisch dar und umgekehrt.	
• zeichnen Schrägbilder von Quadern, entwerfen Netze und stellen Modelle her.	• identifizieren und vergleichen Netze und Schrägbilder.	
• fertigen Säulendiagramme an, interpretieren und nutzen solche Darstellungen. • lesen aus Säulen- und Kreisdiagrammen Daten ab.	• stellen Zufallsversuche durch Baumdiagramme dar und interpretieren diese.	• stellen mehrfache Abhängigkeiten mit Vierfeldertafeln dar und analysieren diese. • stellen Boxplots auch mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge dar und analysieren diese.
• beschreiben Beziehungen zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen.	• wählen unterschiedliche Darstellungsformen der Situation angemessen aus und wechseln zwischen ihnen.	

3.1.5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

am Ende von Schuljahrgang 6	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 8	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 10
Die Schülerinnen und Schüler …		
• stellen einfache mathematische Beziehungen durch Terme, auch mit Platzhaltern, dar und interpretieren diese. • nutzen den Dreisatz. • erstellen Diagramme und lesen aus ihnen Daten ab. • berechnen die Werte einfacher Terme.	• erfassen und beschreiben Zuordnungen mit Variablen und Termen. • nutzen Tabellen, Graphen und Gleichungen zur Bearbeitung linearer Zusammenhänge. • formen überschaubare Terme mit Variablen hilfsmittelfrei um. • formen Terme mit CAS um.	• nutzen Tabellen, Graphen und Gleichungen zur Bearbeitung funktionaler Zusammenhänge.
• übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt.		
• verwenden die Relationszeichen („=“, „<“, „>“, „≤“, „≥“ und „≈“) sachgerecht.		
• lösen einfache Gleichungen durch Probieren.	• nutzen systematisches Probieren zum Lösen von Gleichungen.	
• nutzen die Umkehrung der Grundrechenarten zum Lösen einfacher Gleichungen.	• nutzen tabellarische, graphische und algebraische Verfahren zum Lösen linearer Gleichungen sowie linearer Gleichungssysteme.	• wählen geeignete Verfahren zum Lösen von Gleichungen.
• nutzen Lineal, Geodreieck und Zirkel zur Konstruktion und Messung geometrischer Figuren.	• nutzen DGS, Tabellenkalkulation und CAS zur Darstellung und Erkundung mathematischer Zusammenhänge sowie zur Bestimmung von Ergebnissen.	

3.1.6 Kommunizieren

am Ende von Schuljahrgang 6	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 8	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 10
Die Schülerinnen und Schüler …		
• dokumentieren ihre Arbeit, ihre eigenen Lernwege und aus dem Unterricht erwachsene Merksätze und Ergebnisse unter Verwendung geeigneter Medien.		
• teilen ihre Überlegungen anderen verständlich mit, wobei sie auch die Fachsprache benutzen.	• teilen ihre Überlegungen anderen verständlich mit, wobei sie zunehmend die Fachsprache benutzen.	• teilen ihre Überlegungen anderen verständlich mit, wobei sie vornehmlich die Fachsprache benutzen.
• präsentieren Ansätze und Ergebnisse in kurzen Beiträgen, auch unter Verwendung geeigneter Medien.	• präsentieren Lösungsansätze und Lösungswege, auch unter Verwendung geeigneter Medien.	• präsentieren Problembearbeitungen, auch unter Verwendung geeigneter Medien.
• verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Richtigkeit und gehen darauf ein.	• verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Schlüssigkeit und gehen darauf ein.	• verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Schlüssigkeit und Vollständigkeit und gehen darauf ein.
• entnehmen Daten und Informationen aus einfachen Texten und mathematikhaltigen Darstellungen, verstehen und bewerten diese und geben sie wieder.	• strukturieren, interpretieren, analysieren und bewerten Daten und Informationen aus Texten und mathematikhaltigen Darstellungen.	
• äußern Kritik konstruktiv und gehen auf Fragen und Kritik sachlich und angemessen ein.		
• bearbeiten im Team Aufgaben oder Problemstellungen.	• organisieren die Arbeit im Team selbstständig.	• beurteilen und bewerten die Arbeit im Team und entwickeln diese weiter.
• nutzen das Schulbuch und im Unterricht erstellte Zusammenfassungen zum Nachschlagen.	• nutzen Lexika, Schulbücher, Printmedien und elektronische Medien zur selbstständigen Informationsbeschaffung.	• nutzen eine zugelassene Formelsammlung.

3.2 Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche

3.2.1 Zahlen und Operationen

am Ende von Schuljahrgang 6	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 8	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 10
Die Schülerinnen und Schüler …		
• untersuchen natürliche, ganze und rationale Zahlen.		• grenzen rationale und irrationale Zahlen voneinander ab. • begründen die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterungen.
	• nennen $\sqrt{a}$ als nichtnegative Lösung von $x^2 = a$ für $a \geq 0$.	• nennen $\sqrt[n]{a}$ als nichtnegative Lösung von $x^n = a$ für $a \geq 0$. • nennen $\log_b(a)$ als Lösung von $b^x = a$ für $a > 0$ und $b > 0$.
		• beschreiben und reflektieren Näherungsverfahren und wenden diese an. • identifizieren den Grenzwert als die eindeutige Zahl, der man sich bei einem Näherungsverfahren beliebig dicht annähert. • erläutern die Identität $0,\overline{9} = 1$ als Ergebnis eines Grenzprozesses. • identifizieren π als Ergebnis eines Grenzprozesses.

• stellen rationale Zahlen auf verschiedene Weisen und situationsangemessen dar. • ordnen und vergleichen rationale Zahlen.		
• deuten Brüche als Anteile und Verhältnisse. • nutzen das Grundprinzip des Kürzens und Erweiterns von einfachen Brüchen als Vergröbern bzw. Verfeinern der Einteilung. • deuten Dezimalzahlen und Prozentangaben als Darstellungsformen für Brüche und führen Umwandlungen durch. • nutzen den Prozentbegriff in Anwendungssituationen.		
• rechnen schriftlich mit rationalen Zahlen in alltagsrelevanten Zahlenräumen. • lösen einfache Rechenaufgaben im Kopf.	• führen Rechnungen, auch mit digitalen Mathematikwerkzeugen, aus und bewerten die Ergebnisse. • ziehen in einfachen Fällen Wurzeln aus rationalen Zahlen im Kopf.	
• beschreiben Sachverhalte durch Zahlterme. • geben zu Zahltermen geeignete Sachsituationen an.	• beschreiben Sachverhalte durch Terme und Gleichungen. • modellieren inner- und außermathematische Problemsituationen mithilfe von Termen und Gleichungen. • veranschaulichen und interpretieren Terme.	
• beschreiben die Struktur von Zahltermen. • verwenden Platzhalter zum Aufschreiben von Formeln.	• vergleichen die Struktur von Termen. • verwenden Variablen zum Aufschreiben von Formeln und Rechengesetzen. • nutzen Terme und Gleichungen zur mathematischen Argumentation.	

• nutzen Rechenregeln zum vorteilhaften Rechnen.	• formen Terme mithilfe des Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetzes um und nutzen die binomischen Formeln zur Vereinfachung von Termen. • begründen exemplarisch Rechengesetze für Quadratwurzeln und wenden diese an.	• begründen exemplarisch Rechengesetze für Potenzen mit rationalen Exponenten und wenden diese an.
• nutzen Zusammenhänge zwischen den Grundrechenarten bei Sachproblemen. • lösen Grundaufgaben bei proportionalen und antiproportionalen Zusammenhängen, der Prozent- und Zinsrechnung mit Dreisatz.	• lösen lineare Gleichungen, lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen sowie Verhältnisgleichungen in einfachen Fällen hilfsmittelfrei.	• lösen quadratische Gleichungen vom Typ $x^2 + p \cdot x + q = 0$, $a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$, $a \cdot x^2 + c = 0$ und $a \cdot (x - d)^2 + e = 0$ in einfachen Fällen hilfsmittelfrei. • lösen quadratische Gleichungen vom Typ $x^2 + p \cdot x = 0$ und $x^2 + q = 0$ hilfsmittelfrei.
	• lösen lineare Gleichungen numerisch, graphisch und unter Verwendung von CAS. • lösen lineare Gleichungssysteme numerisch mit Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren, graphisch und unter Verwendung eines CAS.	• lösen Gleichungen numerisch, graphisch und unter Verwendung eines CAS.
• nutzen Runden und Überschlagsrechnungen.	• nutzen beim Gleichungslösen die Probe zur Kontrolle und beurteilen die Ergebnisse.	

3.2.2 Größen und Messen

am Ende von Schuljahrgang 6	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 8	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 10
Die Schülerinnen und Schüler …		
• schätzen Größen und messen sie durch Vergleich mit einer situationsgerecht ausgewählten Einheit.		
• schätzen, messen und zeichnen Winkel.		• geben Winkel im Bogenmaß an
• berechnen Winkelgrößen mithilfe von Neben- Scheitel- und Stufenwinkelsatz und mit dem Winkelsummensatz für Dreiecke.	• berechnen Streckenlängen mithilfe des Satzes von Pythagoras.	
	• berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen mithilfe der Ähnlichkeit und in rechtwinkligen Dreiecken mithilfe von trigonometrischen Beziehungen.	
• begründen die Formeln für Umfang und Flächeninhalt eines Rechtecks durch Auslegen.	• begründen Formeln für den Flächeninhalt von Dreieck, Parallelogramm und Trapez durch Zerlegen und Ergänzen.	• bestimmen die Formeln für den Umfang oder den Flächeninhalt des Kreises mit einem Näherungsverfahren.
• schätzen und berechnen Umfang und Flächeninhalt von Rechtecken und von aus Rechtecken zusammengesetzten Figuren.	• schätzen und berechnen Umfang und Flächeninhalt von Figuren mithilfe von geradlinig begrenzten Figuren.	• schätzen und berechnen Umfang und Flächeninhalt von Kreisen und von aus Kreisen zusammengesetzten Figuren.
• berechnen Oberflächeninhalt und Volumen von Quadern.	• berechnen Längen, Oberflächeninhalt und Volumen von geraden Prismen mithilfe von Formeln.	• berechnen Oberflächeninhalt und Volumen von geraden Pyramiden, Zylindern und Kegeln sowie Kugeln mithilfe von Formeln.
• entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, nehmen in ihrer Umwelt Messungen vor und führen mit den gemessenen Größen Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse sowie den gewählten Weg.		

3.2.3 Raum und Form

am Ende von Schuljahrgang 6	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 8	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 10
Die Schülerinnen und Schüler …		
• charakterisieren Quadrat, Rechteck, Dreieck, Parallelogramm, Raute, Drachen, Trapez, Kreis, Quader, Würfel, Prisma, Kegel, Pyramide, Zylinder und Kugel und identifizieren sie in ihrer Umwelt. • beschreiben ebene und räumliche Strukturen mit den Begriffen Punkt, Strecke, Gerade, Winkel, Abstand, Radius, Symmetrie, „parallel zu“ und „senkrecht zu“. • begründen die Winkelsumme in Dreieck und Viereck. • beschreiben Symmetrien.	• begründen den Satz des Thales und denm Satz des Pythagoras. • beschreiben und begründen Kongruenzen und Ähnlichkeiten.	
• zeichnen Winkel, Strecken und Kreise, um ebene geometrische Figuren zu erstellen oder zu reproduzieren.	• konstruieren mit Zirkel, Geodreieck und dynamischer Geometriesoftware, um ebene geometrische Figuren zu erstellen oder zu reproduzieren. • formulieren Aussagen zur Lösbarkeit und Lösungsvielfalt bei Konstruktionen.	
• stellen im ebenen kartesischen Koordinatensystem Punkte, Strecken und einfache Figuren dar und lesen Koordinaten ab.		
• zeichnen Schrägbilder von Würfel und Quader, entwerfen Körpernetze und stellen Modelle her.	• vergleichen und interpretieren Schrägbilder und Körpernetze von Prismen.	• nutzen Schrägbilder und Körpernetze.

• wenden Neben-, Scheitel- und Stufenwinkelsatz sowie den Winkelsummensatz für Dreiecke zur Berechnung von Winkeln an. • beschreiben Kreise als Ortslinien. • identifizieren Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende als Symmetrieachsen.	• nutzen den Satz des Thales und den Satz des Pythagoras bei Konstruktionen, Berechnungen und Begründungen. • beschreiben und erzeugen Parallelen, Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden als Ortslinien und nutzen deren Eigenschaften. • identifizieren Höhen, Mittelsenkrechten, Seitenhalbierende und Winkelhalbierende als besondere Linien im Dreieck. • begründen, dass sich die drei Mittelsenkrechten und die drei Winkelhalbierenden in je einem Punkt schneiden.	• beschreiben und erzeugen Parabeln als Ortslinien.
• spiegeln und drehen Figuren in der Ebene und erzeugen damit Muster.	• beschreiben und begründen Symmetrie, Kongruenz, Ähnlichkeit, Lagebeziehungen geometrischer Objekte und nutzen diese Eigenschaften im Rahmen des Problemlösens.	

3.2.4 Funktionaler Zusammenhang

am Ende von Schuljahrgang 6	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 8	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 10
Die Schülerinnen und Schüler …		
• identifizieren und beschreiben proportionale und antiproportionale Zusammenhänge zwischen Zahlen und zwischen Größen in Tabellen, Graphen, Diagrammen und Sachtexten.	• beschreiben und erläutern lineare Zusammenhänge zwischen Zahlen und zwischen Größen in Tabellen, Graphen, Diagrammen und Sachtexten.	• beschreiben quadratische, exponentielle und periodische Zusammenhänge zwischen Zahlen und zwischen Größen in Tabellen, Graphen, Diagrammen und Sachtexten, erläutern und beurteilen sie.
• nutzen proportionale und antiproportionale Zuordnungen zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge.	• nutzen lineare Funktionen zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge, auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.	• nutzen quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge, auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.
• stellen proportionale und antiproportionale Zusammenhänge in Tabellen und als Graphen dar und wechseln zwischen diesen Darstellungen.	• stellen lineare Funktionen durch Gleichungen dar und wechseln zwischen den Darstellungen Gleichung, Tabelle, Graph.	• stellen Funktionen durch Gleichungen dar und wechseln zwischen den Darstellungen Gleichung, Tabelle, Graph.
	• beschreiben den Zusammenhang zwischen der Lage von Graphen und der Lösbarkeit der zugehörigen linearen Gleichungen und Gleichungssysteme.	• beschreiben den Zusammenhang zwischen möglichen Nullstellen und dem Scheitelpunkt der Graphen quadratischer Funktionen einerseits und der Lösung quadratischer Gleichungen andererseits. • wechseln bei quadratischen Funktionstermen in einfachen Fällen hilfsmittelfrei zwischen allgemeiner und faktorisierter Form sowie Scheitelpunktform. • beschreiben den Zusammenhang zwischen faktorisierter Termdarstellung ganzrationaler Funktionen und deren Nullstellen.
• lösen Probleme und modellieren Sachsituationen mit proportionalen bzw. antiproportionalen Zuordnungen.	• lösen Probleme und modellieren Sachsituationen mit linearen Funktionen auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.	• lösen Probleme und modellieren Sachsituationen mit Funktionen auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.

	• beschreiben und begründen Auswirkungen von Parametervariationen bei linearen Funktionen, auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.	• führen Parametervariationen für Funktionen mit $y = a \cdot f(b \cdot (x - c)) + d$ an Beispielen, auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge, durch und beschreiben und begründen die Auswirkungen auf den Graphen.
		• grenzen lineares und exponentielles Wachstum gegeneinander ab. • modellieren lineares und exponentielles Wachstum auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.
	• interpretieren die Steigung linearer Funktionen als konstante Änderungsrate.	• beschreiben und interpretieren mittlere Änderungsraten und Sekantensteigungen in funktionalen Zusammenhängen, die als Tabelle, Graph oder Gleichung dargestellt sind, berechnen diese auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge und erläutern sie an Beispielen. • identifizieren die lokale Änderungsrate als Grenzwert mittlerer Änderungsraten und die Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen. • beschreiben und interpretieren die Ableitung als lokale Änderungsrate und als Tangentensteigung, berechnen diese auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge und erläutern sie an Beispielen. • entwickeln Graphen und Ableitungsgraphen auseinander, beschreiben und begründen Zusammenhänge und interpretieren diese in Sachzusammenhängen.

		• bestimmen die Ableitungsfunktion von Potenzfunktionen, von $f(x)=\frac{1}{x}$ und $f(x)=\sin(x)$ sowie $f(x)=\cos(x)$. • wenden die Summen- und Faktorregel zur Berechnung von Ableitungsfunktionen an.
		• lösen mit der Ableitung von ganzrationalen Funktionen Sachprobleme, insbesondere Optimierungsprobleme, auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge. • wenden die Ableitung an, um Fragen an Funktionen zu klären, die sich aus den zugehörigen Graphen ergeben, auch unter Verwendung eines CAS. • bestimmen Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte ganzrationaler Funktionen.

3.2.5 Daten und Zufall

am Ende von Schuljahrgang 6	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 8	zusätzlich am Ende von Schuljahrgang 10
Die Schülerinnen und Schüler …		
• planen statistische Erhebungen und erheben die Daten.	• führen Zufallsexperimente mit teilsymmetrischen, unsymmetrischen und vollsymmetrischen Objekten sowie Simulationen durch und verbinden deren Ergebnisse mit Wahrscheinlichkeiten.	• nutzen die Kenntnisse über zweistufige Zufallsexperimente, um statistische Aussagen mithilfe von Baumdiagramm und Vierfeldertafel zu erhalten.
• beschreiben und interpretieren Daten mithilfe von absoluten und relativen Häufigkeiten, arithmetischem Mittelwert, Wert mit der größten Häufigkeit und Spannweite.		• vergleichen verschiedene Häufigkeitsverteilungen auch mit dem Median, der empirischen Standardabweichung und mit Boxplots.
	• beschreiben Zufallsexperimente mithilfe von Wahrscheinlichkeiten und interpretieren Wahrscheinlichkeiten als Modell bzw. als Prognose relativer Häufigkeiten. • leiten aus der Symmetrie von Laplace-Objekten Wahrscheinlichkeitsaussagen ab. • identifizieren ein- und zweistufige Zufallsexperimente, führen eigene durch und stellen sie im Baumdiagramm dar. • begründen die Pfadregeln zur Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten und wenden sie an. • simulieren Zufallsexperimente, auch mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge.	

3.3 Lernbereiche

Die Lernbereiche geben Anregungen und Hilfestellungen für eine unterrichtliche Umsetzung sowie für die Gestaltung schuleigener Arbeitspläne. Sie zeigen eine Möglichkeit für die Umsetzung des Kerncurriculums im Rahmen einer didaktischen Grundkonzeption auf. Die in 3.1 und 3.2 verbindlich geforderten Kompetenzen werden durch die Lernbereiche vollständig erfasst.

Es werden jeweils Lernbereiche für die Doppelschuljahrgänge 5 und 6, 7 und 8 sowie 9 und 10 beschrieben. Deren Reihung und Struktur stellt keine Setzung, sondern einen sachlogischen Vorschlag dar. Die Lernbereiche stellen keine Unterrichtseinheiten dar und können auch anders zugeschnitten werden. Dies gilt insbesondere für sehr umfangreiche Lernbereiche. Die Umsetzung in einzelne Unterrichtseinheiten wird in den schuleigenen Arbeitsplänen dargestellt.

In den Lernbereichen werden zunächst die mit ihnen verbundenen **Intentionen** kurz dargestellt. Die Beschäftigung mit Mathematik wird von Schülerinnen und Schülern immer dann als sinnvoll angesehen, wenn Probleme zur Auseinandersetzung motivieren. Dieses kann mit Anwendungsorientierung genauso geschehen wie mit innermathematischen Fragestellungen. Ausgehend von konkreten Situationen wird ein grundlegendes Verständnis für Prinzipien, Techniken und Methoden geschaffen. Eine vertiefende, häufig innermathematische Betrachtung führt zu einer zunehmenden Abstraktion und zu einer fachspezifischen Begrifflichkeit.

Im **Kern** werden die in 3.2. verbindlich genannten inhaltsbezogenen Kompetenzen stichwortartig aufgelistet, konkretisiert und mit prozessbezogenen Kompetenzen sowie unterrichtspraktischen Handlungsschritten verknüpft. Die weitere Zuordnung prozessbezogener Kompetenzen erfolgt durch die Lehrkraft. Kompetenzen können nicht isoliert und punktuell, sondern nur über mehrere Lernbereiche und über die Schuljahrgänge hinweg aufgebaut werden.

Die **fakultativen Erweiterungen** geben Anregungen für mögliche, aber nicht erforderliche Zusätze, die über den Kern hinausgehen und auf ein tieferes und komplexeres Verständnis der Begrifflichkeiten abzielen. Jede einzelne Ergänzung rundet einerseits die Sicht auf die Mathematik zu einem umfassenderen Bild ab, zeigt aber andererseits auch klar die Abgrenzung zu den im Kern thematisierten Kompetenzen.

Die **Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge** sind keine verpflichtenden Angaben, sondern weisen auf Gelegenheiten hin, die in 3.1 und 3.2 verpflichtend genannten Kompetenzen im Umgang mit digitalen Mathematikwerkzeugen aufzubauen bzw. anzuwenden. Sie geben Anregungen für einen Unterrichtseinsatz und verzichten auf die Aufzählung von immer verfügbaren Routinen wie beispielsweise die Darstellung von Funktionen oder das Lösen von Gleichungen.

Übersicht über die Lernbereiche

Schuljahrgänge 5/6	Schuljahrgänge 7/8	Schuljahrgänge 9/10
Körper und Figuren	Wahrscheinlichkeit	Rückwärtsschlüsse in der Stochastik
Umgang mit Brüchen	Längen, Flächen- und Rauminhalte und deren Terme	Quadratische Zusammenhänge
Planung und Durchführung statistischer Erhebungen	Elementare Termumformungen	Kreis- und Körperberechnungen
Umgang mit Dezimalzahlen	Entdeckungen an Dreiecken	Funktionen mit Potenzen
Symmetrien	Ein- und zweistufige Zufallsversuche	Beschreibende Statistik
Umgang mit negativen Zahlen	Lineare Zusammenhänge	Periodische Zusammenhänge
Maßzahlen statistischer Erhebungen	Entdeckungen an rechtwinkligen Dreiecken	Näherungsverfahren als Grenzprozesse
Proportionale und antiproportionale Zusammenhänge		Änderungsraten

Die Kompetenzbereiche durchziehen die klassischen Gebiete der Schulmathematik (Geometrie, Stochastik, Algebra und Analysis) und werden in ihnen verknüpft.

Zahlen verschiedener Art spielen in allen klassischen Teilgebieten der Schulmathematik eine Rolle. In den Schuljahrgängen 5/6 erkunden die Schülerinnen und Schüler die Eigenschaften und Rechengesetze für Brüche, negative Zahlen und Dezimalzahlen. In analoger Weise gehen die Schülerinnen und Schüler mit Wurzeln quadratischer Gleichungen zunächst naiv um und erkunden dabei die Wurzelgesetze.

Erst in den Schuljahrgängen 9/10 wird die Irrationalität gewisser Wurzeln zum Thema und bietet Anlass zur Einführung der reellen Zahlen. In der Rückschau werden nun auch die Übergänge von den natürlichen zu den ganzen und zu den rationalen Zahlen als Zahlbereichserweiterungen gedeutet.

Der Unterricht in **Geometrie** verknüpft die Kompetenzbereiche Raum und Form, Größen und Messen und Funktionaler Zusammenhang.

Schülerinnen und Schüler erschließen sich den Anschauungsraum, indem sie geometrische Körper und Figuren sowie Kongruenz und Ähnlichkeit – möglichst auf entdeckendem Wege - untersuchen. Das räumliche Vorstellungsvermögen lässt sich im Doppelschuljahrgang 5/6 besonders nachhaltig entwickeln. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Schülerinnen und Schüler gegebenenfalls sehr umfassende und vielfältige Vorkenntnisse über geometrische Körper aus der Grundschule mitbringen.

Schülerinnen und Schüler lernen außerdem Probleme zu lösen. Mit Konstruktionsaufgaben oder beim Begründen geometrischer Sachverhalte lassen sich heuristische Strategien wie Rückwärtsarbeiten, modulares Arbeiten oder Rückführung auf andere bekannte Sachverhalte einsichtig machen.

Der Wechsel der Darstellungsformen wird besonders deutlich, denn Dreieckskonstruktionen, die im Doppelschuljahrgang 7/8 zeichnerisch erfolgen, werden später rechnerisch beschrieben. Kurven werden Funktionen zugeordnet, können mitunter aber auch als Ortslinien aufgefasst werden. Die Idee der Ortslinie wird in verschiedenen Lernbereichen deutlich.
Schülerinnen und Schüler nehmen eine lokale Ordnung geometrischer Sachverhalte vor, um Phänomene zu klären, die auf den ersten Blick überraschend wirken.

Im gesamten Geometrieunterricht wird insbesondere die prozessbezogene Kompetenz „Argumentieren“ gefördert. Die Fachsprache hat dabei eine sachdienliche Bedeutung und ist kein Selbstzweck.

Bei heuristischen Arbeitsweisen steht die Strategie im Fokus und nicht deren formale Darstellung. Ein sinnvoll gestalteter Einsatz der digitalen Mathematikwerkzeuge erweitert den geometrischen Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler in lernförderlicher Weise und unterstützt den Erkenntnisprozess. Das Rechnen behält einen dem Problem angemessenen Umfang und steht nicht im Vordergrund.

Stochastik bezieht sich auf den Kompetenzbereich Daten und Zufall. Die Ermittlung von Daten durch Befragungen, Experimente und Beobachtungen stellt den Beginn stochastischen Arbeitens dar. Die Darstellung von Rohdaten in einem Säulendiagramm ist mit Informationsreduktion verbunden, der Übergang zu Lage- und Streumaßen ist eine erneute Informationsreduktion.

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff stellt eine Modellierung dar und erlaubt insbesondere die Prognose von Daten.

Die Schülerinnen und Schüler erwerben sowohl durch vielfältige Zufallsexperimente als auch durch Simulationen ein Verständnis des Wechselspiels zwischen Daten und Wahrscheinlichkeiten, d.h. zwischen Realität und Modell. Der Umgang mit absoluten Häufigkeiten erleichtert dabei das Verständnis.

Die **Algebra** ist das grundlegende Teilgebiet der Mathematik, das die Kompetenzbereiche Zahlen und Operationen sowie Funktionaler Zusammenhang verfolgt. Sie umfasst die Rechenregeln der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen, den Umgang mit Ausdrücken, die Variablen enthalten, und Wege zur Lösung einfacher algebraischer Gleichungen. Sie beginnt somit bei den Zahlen und Zahltermen, mit denen die Rechenregeln erkundet werden, und findet ihre Fortsetzung bei elementaren Termumformungen. Eine Klassifizierung der Terme nach ihrer Struktur ist hierbei für die Schülerinnen und Schüler hilfreich.

Im Unterricht der Schuljahrgänge 5/6 ist zu berücksichtigen, dass die Schülerinnen und Schüler aus dem Mathematikunterricht der Grundschule die schriftliche Division mit einstelligem Divisor mitbringen. Diese wird an passender Stelle wiederholt und gefestigt und um die Division mit mehrstelligem Divisor ergänzt.

Bei der Lösung linearer Gleichungen werden grundsätzliche Strategien beim Umformen von Termen im Doppelschuljahrgang 7/8 angelegt und im Umgang mit quadratischen und einfachen Potenz- und Sinusgleichungen vertieft und gefestigt. Dieses Fundament wird fortlaufend und nachhaltig verbreitert und verstärkt, so dass es den verständigen Umgang mit weiterführenden mathematischen Fragestellungen auch in funktionalen Zusammenhängen und beim Messen in geometrischen Figuren fördert.

Die digitalen Mathematikwerkzeuge werden dabei einerseits angemessen zur Gewinnung und Sicherung von Erkenntnissen genutzt und andererseits beim Einsatz zur Ergebnisberechnung auch kritisch reflektiert.

Die **Analysis** liefert eine Methode, mit Grenzprozessen widerspruchsfrei umzugehen. Durch die Reflexion ausgewählter Grenzprozesse werden die Kompetenzbereiche Funktionaler Zusammenhang, Raum und Form sowie Zahlen und Operationen verknüpft und zueinander in Beziehung gesetzt.

Das zentrale Problem, von der mittleren zur lokalen Änderungsrate zu gelangen, wird mit der für die Mathematik typischen Strategie der Anknüpfung an Bekanntes gelöst: Die Berechnung von Sekantensteigungen und die Erfahrungen mit Grenzprozessen werden für die Berechnung der Tangentensteigung genutzt.

Die Grundidee des Approximierens zieht sich durch den gesamten Analysisunterricht und wird von den Schülerinnen und Schülern beispielsweise bei Wurzeln, Kreisfläche und -umfang und Asymptoten zunächst anschaulich verfolgt, um zu Zahlen oder Formeln zu gelangen, mit denen gerechnet werden kann. Im Schuljahrgang 10 werden diese Grenzprozesse verglichen, um zu einem anschaulichen Verständnis des Grenzwertes zu gelangen. Diese Betrachtungen von Grenzprozessen werden in der Kursstufe in den Lernbereichen zur Analysis sinnvoll fortgeführt.

Die verschiedenen Grundvorstellungen zur Ableitung als lokale Änderungsrate, lineare Approximation oder Tangentensteigung beinhalten ein Verständnis der auftretenden Approximationsprozesse, die verschiedene Facetten des Grenzwertbegriffs beleuchten.

Diese Lernprozesse sind komplex, brauchen vielfältige inner- und außermathematische Kontexte und vor allem Zeit und sie eignen sich besonders zur inneren Differenzierung.

Das graphische Differenzieren eignet sich dabei als Schätzmethode, um zunächst anschaulich eine mögliche Ableitungsfunktion zu erzeugen, die dann mithilfe des Differenzenquotienten analytisch bestätigt wird.

Die Funktionsuntersuchung zieht sich ebenfalls als roter Faden durch den gesamten Mathematikunterricht. Fragen, die sich aus der Betrachtung des Funktionsgraphen ergeben, können durch den direkten Vergleich von Funktionsterm und Funktionsgraph und Parametervariation nicht vollständig geklärt werden. Der Ableitungsbegriff eröffnet neue Untersuchungsmethoden und damit neue Antworten und Erkenntnisse über Eigenschaften und besondere Punkte von Funktionsgraphen. Dabei geht es nicht um ein rezeptartiges Abarbeiten der Kurvendiskussion, sondern um die kritische Betrachtung von Funktionsgraphen und um die Entwicklung von Zusammenhängen und um Methoden zur Überprüfung von Auffälligkeiten.

3.3.1 Lernbereiche für den Doppelschuljahrgang 5 und 6

Lernbereich: Körper und Figuren

Intentionen

Der Umgang mit Körpern und Figuren dient zur Weiterentwicklung des geometrischen Vorstellungsvermögens.

Dazu werden Eigenschaften von Körpern und Figuren erkundet.

Gerade im Umgang mit Körpern und deren Eigenschaften kann zumeist auf sehr umfangreiche und vielfältige Vorkenntnisse und Vorerfahrungen aus der Grundschule zurückgegriffen werden.

Bei der Bearbeitung von Problemstellungen aus der räumlichen und ebenen Geometrie werden Erfahrungen zu Eigenschaften von Körpern und Figuren gewonnen. Schülerinnen und Schüler stellen Körper selber her, um diese zu erfassen und um durch Handeln ein räumliches Vorstellungsvermögen zu entwickeln. An geeigneter Stelle kann das ebene kartesische Koordinatensystem eingeführt werden.

In Mustern können viele geometrische Grundbegriffe entdeckt und untersucht werden.

Bei der Bestimmung von Längen, Flächen- und Rauminhalten von geradlinig begrenzten Figuren mit rechten Winkeln wird das Zusammenspiel von Geometrie und Arithmetik deutlich. Die Flächen- und Rauminhalte einfacher Figuren werden durch Terme beschrieben und unter Berücksichtigung passender Einheiten berechnet. Nicht direkt berechenbare Größen werden dabei durch Probieren oder die Umkehrung der Grundrechenarten ohne eine Thematisierung der Äquivalenzumformungen ermittelt. Dabei steht die Entwicklung einer Größenvorstellung im Vordergrund.

Kern

- Formen in Raum und Ebene erkunden
  - Grundformen geometrischer Körper und Figuren beschreiben, charakterisieren und in der Umwelt identifizieren
  - Kantenmodelle von Körpern und Figuren
- zueinander parallele und zueinander senkrechte Geraden identifizieren und darstellen
- räumliche Objekte darstellen
  - Schrägbilder und Modelle von Würfeln und Quadern
  - Raumanschauung durch Netze
- Längen, Flächen- und Rauminhalte ermitteln
  - vergleichen, schätzen, berechnen
  - Formeln entwickeln, anwenden und interpretieren
- Winkel erkunden
  - Winkel in der Umwelt entdecken
  - Winkel schätzen, messen und zeichnen
  - Neben-, Scheitel- und Stufenwinkel
- Winkelsummensatz für Innenwinkel in Drei- und Vierecken begründen und anwenden

Fakultative Erweiterungen:

Schrägbilder und Modelle weiterer Körper; Parkettierung; Wechselwinkel; Winkelsummensatz für Innenwinkel in n-Ecken

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:
Raum und Form; Zahlen und Operationen; Größen und Messen

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:
—

Lernbereich: Umgang mit Brüchen

Intentionen

Das Alltagswissen der Schülerinnen und Schüler über Brüche und deren Schreibweise wird aufgegriffen und vertieft. Hieran anknüpfend werden - mit deutlichem Realitätsbezug und anhand überschaubarer Zahlenbeispiele - die Rechenregeln erkundet. Auf der Grundlage der Vorerfahrung wird der Bruchbegriff anschaulich erarbeitet und nachhaltig gesichert. Dazu wird vielfältig zwischen konkreter, verbaler, bildlicher und symbolischer Darstellung gewechselt.

Die algebraischen Betrachtungsweisen orientieren sich an den geometrischen Veranschaulichungen. Verschiedene altersgerechte Bruchvorstellungen (Anteilkonzept, Aufteilkonzept, Verhältnis) werden aufgebaut. Die verschiedenen Bruchvorstellungen werden in Sachzusammenhängen verdeutlicht.

Die Untersuchung von Brüchen wie $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ stellt eine Verbindung mit dem Lernbereich „Umgang mit Dezimalzahlen“ her.

Gleichzeitig wird eine angemessene Routine beim Rechnen mit einfachen Brüchen erreicht und langfristig gesichert. Dabei wird die aus der Grundschule bekannte schriftliche Division mit einstelligem Divisor an passender Stelle wiederholt und gefestigt und um die Division mit mehrstelligem Divisor ergänzt.

Kern

- Brüche im Alltag erkunden
  - Anteile, Maßstäbe, Prozente, Verhältnisse
- Bruchdarstellungen verwenden
  - bildliche, verbale, geometrische und algebraische Bruchdarstellungen
  - Brüche vergleichen, kürzen und erweitern
- mit Brüchen rechnen
  - Grundrechenarten mit einfachen Brüchen
  - Rechenregeln zum vorteilhaften Rechnen verwenden
  - Bruchvorstellungen in Sachzusammenhängen anwenden
  - Grundrechenarten umkehren, um einfache Gleichungen zu lösen

Fakultative Erweiterungen:

—

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Zahlen und Operationen

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:

—

Lernbereich: Planung und Durchführung statistischer Erhebungen

Intentionen

Der Umgang mit Daten ist grundlegend für den Stochastikunterricht. In diesem Lernbereich liegt der Fokus auf der Planung und Durchführung statistischer Erhebungen.

Ausgehend von Fragestellungen der Schülerinnen und Schüler werden Erhebungen geplant und dabei Fehlermöglichkeiten diskutiert. Dadurch können auch Planung und Erhebung statistischer Fremddaten beurteilt werden.

Die Lernenden erfahren altersgerecht die mit einer Datenerhebung verbundene Problematik, indem sie eigene Datensätze erheben. Den Sinn eigener Datensätze sehen die Schülerinnen und Schüler ein, wenn vorab gebildete Hypothesen über die Gestalt der Daten entweder zu vage sind oder gar der tatsächlichen Gestalt widersprechen.

Kern

- eine Befragung oder eine Beobachtung planen und durchführen
  - Erkenntnisinteresse formulieren
  - die zu ermittelnden Merkmale identifizieren
  - die ggf. vorliegende Nichteindeutigkeit der Merkmale diskutieren
  - vorab Hypothesen aufstellen
  - die zu befragende bzw. zu beobachtende Stichprobe planen
  - Strichlisten zur Aufbereitung der Daten anlegen und nutzen
  - Hypothesen prüfen
- ein Experiment planen und durchführen
  - Erkenntnisinteresse formulieren
  - das zu ermittelnde Merkmal identifizieren
  - vorab Hypothesen aufstellen
  - die Durchführung planen
  - verschiedene Möglichkeiten zur Aufbereitung der Daten nutzen
  - Hypothesen prüfen

Fakultative Erweiterungen:

—

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Daten und Zufall

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:

Tabellenkalkulation zur Darstellung

Lernbereich: Umgang mit Dezimalzahlen

Intentionen

Ausgehend vom Alltagswissen der Schülerinnen und Schüler steht der Aufbau verschiedener angemessener Zahlvorstellungen im Vordergrund. Hieran anknüpfend werden - mit deutlichem Realitätsbezug und anhand überschaubarer Zahlenbeispiele - die Rechenregeln erkundet. Das Rechnen mit Dezimalzahlen erfolgt mit den Grundrechenarten und angemessen kleinen bzw. einfachen Operanden unter angemessener Anwendung des Stellenwertsystems. Die Verbindung zwischen den Dezimalzahlen und den Brüchen wird hergestellt.

Beim Umrechnen der Einheiten werden sinnvolle Beispiele für die Größen *Zeit*, *Masse, Geld*, Längen, *Flächen*- und *Rauminhalte* gewählt. Das wichtige heuristische Verfahren des Schätzens bzw. die Ermittlung von Näherungswerten und Überschlagsrechnungen wird zur Überprüfung und für Plausibilitätsüberlegungen verwendet. Im Sinne vom Messen als Vergleich mit einer vereinbarten Basiseinheit werden die Einheiten miteinander verglichen.

Die aus der Grundschule bekannte schriftliche Division mit einstelligem Divisor wird an passender Stelle wiederholt und gefestigt und um die Division mit mehrstelligem Divisor ergänzt.

Kern

- Dezimalzahlen auf der Zahlengeraden und als Bruch darstellen
- mit Dezimalzahlen rechnen
  - Grundrechenarten in alltagsrelevanten Zahlenräumen anwenden und mit dem Wissen über das Rechnen mit Brüchen verknüpfen
  - Grundrechenarten umkehren, um einfache Gleichungen zu lösen
  - Rechenregeln in Sachzusammenhängen erläutern und zum vorteilhaften Rechnen verwenden
  - Zusammenhänge zwischen den Grundrechenarten auch bei Sachproblemen nutzen
- runden und schätzen
- Größen umrechnen

Fakultative Erweiterungen:

—

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Zahlen und Operationen

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:

—

Lernbereich: Symmetrien

Intentionen

Körper und Figuren lassen sich mit Hilfe ihrer Symmetrieeigenschaften beschreiben.

Das Erkennen und Beschreiben von Symmetrien dient der Weiterentwicklung des geometrischen Vorstellungsvermögens.

Einerseits entdecken und untersuchen Schülerinnen und Schüler Symmetrien in Figuren und Mustern, andererseits erfassen sie Figuren und Muster durch eigenes Zeichnen und finden sich so in ihnen zurecht. Abbildungen (Spiegeln und Drehen) werden zur Erzeugung von Mustern und nicht als eigene mathematische Objekte verwendet.

Dabei reicht es aus, dass Spiegelungen mithilfe des Geodreiecks erfolgen. Drehungen können sich auf Dreieck, Viereck oder Kreis beschränken.

Schülerinnen und Schüler verwenden die Ortslinieneigenschaft des Kreises, um Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden zu konstruieren.

Kern

- Ebenensymmetrie, Achsensymmetrie, Punktsymmetrie, Drehsymmetrie beschreiben, auch im Raum
- Spiegelungen und Drehungen in der Ebene durchführen
- Dreiecke und Vierecke nach Symmetrien lokal ordnen
  - gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck
  - Haus der Vierecke
- Kreise beschreiben und verwenden
  - Symmetrie des Kreises
  - Kreis als Ortslinie
  - Konstruktion von Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden als Symmetrieachsen
- Muster beschreiben und erzeugen

Fakultative Erweiterungen:

Kugeln und Mittelebenen als Ortsflächen; Parkettierung

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:
Raum und Form; Größen und Messen

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:
DGS zur Mustererzeugung

Lernbereich: Umgang mit negativen Zahlen

Intentionen

Das Alltagswissen der Schülerinnen und Schüler über negative Zahlen (Temperaturen, Schulden) wird aufgegriffen und vertieft.

Hieran anknüpfend werden die Rechenregeln erkundet. Dieses erfolgt anhand realitätsbezogener und überschaubarer Zahlenbeispiele.

Da sich bei der Multiplikation negativer mit negativen Zahlen keine realitätsnahe Einführung anbietet, nutzen Schülerinnen und Schüler hier das Permanenzprinzip und erfahren dabei den Nutzen der Mustererkennung.

Im Doppelschuljahrgang 9/10 wird die hier noch intuitiv vorgenommene Zahlbereichserweiterung zusammen mit der Erweiterung durch rationale und irrationale Zahlen bewusst gemacht.

Kern

- positive und negative Zahlen an der Zahlengeraden veranschaulichen
- positive und negative Zahlen addieren und subtrahieren
  - Realitätsnahe Einführung, etwa am Temperaturmodell
  - Muster in Rechenreihen beschreiben und fortführen
- positive Zahlen mit negativen Zahlen multiplizieren und umgekehrt
  - Realitätsnahe Einführung, etwa am Schuldenmodell
  - Muster in Rechenreihen beschreiben und fortführen
- negative Zahlen mit negativen Zahlen multiplizieren
- Vorzeichenregeln bei der Division
- Klammerschreibweise; Umgang mit Vor- und Rechenzeichen
- Rechenregeln zum vorteilhaften Rechnen verwenden

Fakultative Erweiterungen:

—

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:
Zahlen und Operationen

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:

—

Lernbereich: Maßzahlen statistischer Erhebungen

Intentionen

Daten lassen sich übersichtlich beschreiben. In diesem Lernbereich liegt der Fokus auf der Darstellung und Auswertung erhobener Daten.

Erhebungen werden ausgewertet und dabei unterschiedliche Arten von Säulendiagrammen diskutiert.
In Säulen- und Kreisdiagrammen dargestellte Fremddaten werden abgelesen und qualitativ interpretiert.
Dabei sind auch Fragen wie „Hat die Häufigkeitsverteilung Besonderheiten?“ oder „In welchem Bereich liegen 50 % der Daten?“ sinnvoll.
Das arithmetische Mittel wird gegenüber dem Wert mit der größten Häufigkeit (Modalwert) abgegrenzt. Da der Modalwert einen viel größeren Kontrast zum arithmetischen Mittel aufweist als der Median, wird letzterer erst im Doppelschuljahrgang 9/10 zum Thema.
Lernende geben Fragen an, bei denen der Modalwert die angemessenere Antwort gibt als das arithmetische Mittel (und umgekehrt).
Als Streumaß wird die anschaulich gut zugängliche Spannweite eingeführt.

Kern

- Häufigkeitsverteilungen graphisch darstellen
  - Säulendiagramme; Einfluss der Klassenbreite
  - Informationsreduktion beim Übergang von Rohdaten zum Säulendiagramm
  - aus Säulendiagrammen Informationen entnehmen
  - Kreisdiagramme lesen
- Zwei Häufigkeitsverteilungen vergleichen
  - relative Häufigkeit
  - die Lageparameter arithmetisches Mittel und Modalwert interpretieren und gegeneinander abgrenzen, insbesondere bei selbst erhobenen Daten
  - Lageparameter bestimmten Fragestellungen zuordnen
  - Spannweite als Streumaß
  - Informationsreduktion beim Übergang vom Säulendiagramm zu den Lageparametern und Streumaßen
  - umgekehrte Fragestellung: fiktive Rohdaten mit vorgegebenen Lageparametern und Streumaßen erstellen

Fakultative Erweiterungen:
—

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:
Daten und Zufall

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:
Tabellenkalkulation zur Darstellung und Berechnung

Lernbereich: Proportionale und antiproportionale Zusammenhänge

Intentionen

Den Schülerinnen und Schülern sind aus dem Alltag vielfältige Beispiele für Zuordnungen bekannt. Die diesen Beispielen zugrunde liegende Struktur wird altersangemessen präzisiert und erfasst. Insbesondere wird das Denken in Proportionen geschult.

Zuordnungen werden tabellarisch und graphisch untersucht, ineinander überführt und klassifiziert.

Es werden die tabellarischen und graphischen Eigenschaften proportionaler Zusammenhänge untersucht. Problemstellungen werden anschaulich mit dem Dreisatz an Tabellen gelöst.

In gleicher Weise erfolgt die Behandlung antiproportionaler Zusammenhänge.

Die Eigenschaften der Produkt- bzw. Quotientengleichheit werden nach Festigung der Zuordnungsvorstellung thematisiert.

Durch sinnvolle Beispiele erfahren die Schülerinnen und Schüler die Grenzen der Modellbildung.

Die Prozent- und Zinsrechnung wird unter dem Aspekt der Proportionalität behandelt. Problemstellungen werden mit dem Dreisatz bearbeitet.

Die aus der Grundschule bekannte schriftliche Division mit einstelligem Divisor wird an passender Stelle wiederholt und gefestigt und um die Division mit mehrstelligem Divisor ergänzt.

Kern

- Zuordnungen erfassen
  - Beschreibung durch Worte, Tabellen und Graphen
  - zwischen Darstellungsformen wechseln
- proportionale Zusammenhänge erfassen
  - graphisches und tabellarisches Identifizieren
  - Abgrenzung zu anderen „Je-mehr-desto-mehr“-Zusammenhängen
  - Dreisatz zur Berechnung
  - Quotient als „Betrag pro Einheit“
- antiproportionale Zusammenhänge erfassen
  - graphisches und tabellarisches Identifizieren
  - Abgrenzung zu anderen „Je-mehr-desto-weniger“-Zusammenhängen
  - Dreisatz zur Berechnung
  - Produkt als „Gesamtgröße“
- Prozent- und Zinsrechnung mithilfe des Dreisatzes

Fakultative Erweiterungen:

Zuordnungsvorschriften; Zinseszinsen

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:
Zahlen und Operationen; Funktionaler Zusammenhang

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:
—

3.3.2 Lernbereiche für den Doppelschuljahrgang 7 und 8

Lernbereich: Wahrscheinlichkeit

Intentionen

Daten können durch Wahrscheinlichkeiten modelliert werden.

Ausgehend vom Verständnis der relativen Häufigkeiten wird als deren theoretisches Modell der Begriff der Wahrscheinlichkeit entwickelt. Um diese beiden Begriffe gegeneinander abgrenzen zu können, eignet sich die Untersuchung teilsymmetrischer Objekte wie Quader.
Bei Objekten wie Reißzwecken, bei denen man nicht von der Form auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung schließen kann, wird die Wahrscheinlichkeit als Prognose relativer Häufigkeiten gedeutet.
Bei vollsymmetrischen Objekten wie ungezinkten Würfeln lassen sich Wurfwahrscheinlichkeiten ohne reale Daten bestimmen. Durch Simulationen (händisch sowie mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge) wird das Verständnis des Unterschieds zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit vertieft sowie das Gesetz der großen Zahlen (Variabilität) verdeutlicht.

Kern

- Versuchsreihen mit teilsymmetrischen Objekten durchführen
  - Vermutungen über Häufigkeiten aufstellen
  - Wahrscheinlichkeit gegen relative Häufigkeit abgrenzen
  - Gesetz der großen Zahlen
  - Wahrscheinlichkeit als Prognose
- eine Versuchsreihe mit unsymmetrischen Objekten durchführen
  - Gesetz der großen Zahlen
  - Wahrscheinlichkeit als Prognose
- eine Versuchsreihe mit vollsymmetrischen Objekten durchführen
  - Laplace-Wahrscheinlichkeit
  - Wahrscheinlichkeit gegen relative Häufigkeit abgrenzen
  - Gesetz der großen Zahlen
- Additions- und Komplementärregel begründen und anwenden

Fakultative Erweiterungen:

Erwartungswert eines Gewinns

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Daten und Zufall

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:

Simulationen durchführen

Lernbereich: Längen, Flächen- und Rauminhalte und deren Terme
Intentionen Bei der Berechnung von Figuren und Körpern spielt die Anwendung wesentlicher heuristischer Strategien wie Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Ergänzen zu Bekanntem und Wechsel der Darstellungsebene eine wesentliche Rolle. So schulen die Schülerinnen und Schüler ihre Fähigkeiten und Fertigkeiten im Problemlösen. Bei der Bestimmung von Längen, Flächen- und Rauminhalten von Figuren wird das Zusammenspiel von Geometrie und Arithmetik deutlich. Die Flächen- und Rauminhalte einfacher Figuren werden durch Terme beschrieben und unter Berücksichtigung passender Einheiten berechnet. Werden dabei jeweils unterschiedliche Terme aufgestellt, wird deren Gleichheit begründet. Zum Ausschärfen einer Größenvorstellung ist das Schätzen notwendig, das immer wieder in passenden Sachzusammenhängen geschult wird. Vergleich und Interpretation sowie der Darstellungswechsel von Schrägbildern und Netzen dienen dazu, dass die Schülerinnen und Schüler Körper erfassen und ihr räumliches Vorstellungsvermögen weiterentwickeln.

Kern
• Umfang und Flächeninhalt von Dreieck, Parallelogramm, Trapez ermitteln
  ▪ vergleichen, schätzen, berechnen
  ▪ Formeln entwickeln, anwenden und interpretieren
• Oberflächen- und Rauminhalt von geradem Prisma ermitteln
  ▪ vergleichen, schätzen, berechnen
  ▪ Formeln entwickeln, anwenden und interpretieren
• mit Schrägbildern und Netzen umgehen
  ▪ vergleichen und interpretieren
  ▪ zwischen verschiedenen Darstellungen wechseln

Fakultative Erweiterungen: Raute; Drachenviereck
Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche: Raum und Form
Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge: DGS zur Exploration und zur Bestätigung; CAS als Tutor

Lernbereich: Elementare Termumformungen

Intentionen

Die Typen der umzuformenden Terme werden aus einem Sachkontext gewonnen oder innermathematisch bereitgestellt. Sofern Einstiegskontexte aus Problemstellungen anderer Lernbereiche gewonnen werden, werden die Ergebnisse im Sachkontext interpretiert.

Kontextfreie Terme sollten in ihrer Komplexität nicht zu sehr über die Komplexität kontextgebundener Terme hinausgehen.

Der Umgang mit Termen gelingt sicherer, wenn Terme nach ihrer Struktur klassifiziert werden.

Die Variablen sind im Sinne von Platzhaltern verankert. Der Variablenbegriff und der Zusammenhang zwischen Termen und Funktionen sowie der Darstellungswechsel zwischen Term, Graph und Tabelle werden hier vorbereitet und in späteren Lernbereichen ausgeschärft.

Beim Umgang mit konkreten Zahlen haben die Schülerinnen und Schülern die Rechengesetze bisher intuitiv verwendet. Die Gesetze werden jetzt geometrisch visualisiert und dann auf negative Zahlen übertragen.

Grundsätzliche Strategien beim rechnerfreien Umformen von Termen werden an einfachen Beispielen verdeutlicht, dann verallgemeinert und verankert.

Dieser Lernbereich ist sehr eng mit vielen Lernbereichen vernetzt. Die erlernten Strategien werden immer wieder an geeigneter Stelle thematisiert, um präsent zu bleiben.

Kern

- Eenfache Termumformungen durchführen
  - gleichartige Terme zusammenfassen
  - ausmultiplizieren
  - ausklammern
- Summen multiplizieren
  - unterschiedliche Summen ausmultiplizieren
  - binomische Formeln als Spezialfall anwenden
- einfache lineare Gleichungen lösen
- einfache Verhältnisgleichungen lösen

Fakultative Erweiterungen:

—

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:
Zahlen und Operationen; funktionaler Zusammenhang; Größen und Messen

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:
CAS zur Kontrolle, zur Exploration oder als Tutor

Lernbereich: Entdeckungen an Dreiecken

Intentionen

Bei vertieften Untersuchungen an Dreiecken werden heuristische und argumentative Fähigkeiten gefördert.

Die Idee der Ortslinie beim Kreis wird erweitert auf Parallelen, Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden. Die Ortslinieneigenschaften von Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden werden verwendet, um Schnittpunktseigenschaften begründen zu können und um Konstruktionsprobleme zu lösen.

Die Kongruenzsätze werden im Sinne der vier Grundkonstruktionen für Dreiecke verwendet.

Die Alltagsvorstellung von Ähnlichkeit als Invarianz der Form wird bei geradlinig begrenzten Figuren durch die Übereinstimmung in den Winkelgrößen und die Gleichheit der Verhältnisse entsprechender Seitenlängen präzisiert. Das Auffinden ähnlicher Dreiecke ermöglicht z. B. die Berechnung von Längen.

Maßstabsgetreue Zeichnungen dienen der Größenbestimmung und bereiten weitergehende Berechnungen vor.

Kern

- Dreiecke konstruieren
  - vier Grundkonstruktionen
  - Kongruenz
- Transversalen erkunden
  - Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, Höhen identifizieren und konstruieren
  - Parallele, Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende als Ortslinien identifizieren
  - Schnittpunkte von Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden begründen
  - ausgewählte komplexere Dreieckskonstruktionen durchführen
- Ähnlichkeit beschreiben und nutzen
  - zueinander ähnliche Dreiecke identifizieren
  - Ähnlichkeitssätze für Dreiecke
  - Streckenlängen berechnen

Fakultative Erweiterungen:
Umkreis; Inkreis; Strahlensatzfiguren; Ähnlichkeit weiterer Figuren; Begründungen mit Kongruenzsätzen

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:
Raum und Form

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:
DGS zur Exploration

Lernbereich: Ein- und zweistufige Zufallsversuche

Intentionen

Mithilfe von Wahrscheinlichkeiten lassen sich Häufigkeiten auch in komplexeren Situationen prognostizieren.
Man arbeitet möglichst lange mit absoluten Häufigkeiten, da das Denken in natürlichen Zahlen weniger fehlerträchtig ist. Es wird darauf geachtet, dass das Bewusstsein für die Variabilität bei Zufallsversuchen erhalten bleibt: Die Lernenden erfahren durch Simulationen, dass die vorhergesagten Häufigkeiten nicht punktgenau eintreffen.
Auch die Pfadregeln sind mit absoluten Häufigkeiten besonders gut einsichtig zu machen.
Die Zufallsversuche beschränken sich nicht nur auf Laplace-Versuche.
Der Unterschied zwischen Ziehen mit und Ziehen ohne Zurücklegen wird verdeutlicht.
Simulationen befördern nachhaltig den Kompetenzerwerb.

Kern

- einstufige Zufallsexperimente mit bekannten Pfad-Wahrscheinlichkeiten prognostizieren und durchführen
  - Prognose absoluter Häufigkeiten
  - die Prognose mit dem Ausgang eines mehrfach durchgeführten Zufallsexperiments vergleichen
  - qualitative Beurteilung der Prognose in Abhängigkeit von der Anzahl der Versuchsdurchführungen; Zusammenhang zum Gesetz der großen Zahlen
- Zweistufige Zufallsexperimente mit bekannten Pfad-Wahrscheinlichkeiten prognostizieren und durchführen
  - Darstellung im Baumdiagramm
  - Prognose absoluter Häufigkeiten
  - die Prognose mit dem Ausgang eines mehrfach durchgeführten Zufallsexperiments vergleichen
  - Variabilität der erzielten absoluten Häufigkeiten
  - die Pfadregeln mithilfe von absoluten Häufigkeiten begründen
  - die Pfadregeln anwenden

Fakultative Erweiterungen:

mehrstufige Zufallsexperimente, Summenverteilung beim zweimaligen Würfeln, Erwartungswerte

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:
Daten und Zufall

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:
Simulationen durchführen

Lernbereich: Lineare Zusammenhänge
Intentionen Die Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler über Zuordnungen und Terme und deren verschiedene Darstellungsformen werden aufgegriffen, um den Funktionsbegriff vorzubereiten, der erst in den folgenden Jahren ausgeschärft werden kann. Lineare funktionale Zusammenhänge werden erkundet und lineare Funktionen und Gleichungen als mathematische Modelle für bestimmte Zusammenhänge identifiziert. Dabei erfahren die Schülerinnen und Schüler den Übergang von statischen zu dynamischen Variablen und entwickeln ein grundlegendes Verständnis für das funktionale Denken. Ein vertieftes Verständnis wird durch den Darstellungswechsel Gleichung – Graph – Tabelle gefördert. Die Schülerinnen und Schüler zeichnen Graphen linearer Funktionen auch hilfsmittelfrei. Die Steigung wird als konstante Änderungsrate identifiziert. Digitale Mathematikwerkzeuge werden angemessen zur Visualisierung, zur numerischen Lösung sowie zur linearen Regression eingesetzt. Einfache lineare Gleichungen und Gleichungssysteme lösen die Schülerinnen und Schüler - auch mit Parametern - von Hand, wobei das Einsetzungsverfahren fächerübergreifend als universelle Lösungsstrategie betrachtet wird.

Kern
• lineare Zusammenhänge identifizieren und darstellen
  ▪ Sachtext, Diagramm, Tabelle, Koordinatensystem, Gleichung
  ▪ hilfsmittelfreies Zeichnen von Geraden
  ▪ Wechsel und Beziehungen der Darstellungsformen
  ▪ Abgrenzung gegen nicht-lineare Zusammenhänge
• lineare Funktionen und lineare Gleichungen analysieren und vergleichen
  ▪ Bezug Funktionsterm, Funktionsgleichung und Funktionsgraph
  ▪ Steigungsdreieck, y-Achsenabschnitt und Nullstelle
  ▪ Steigung als konstante Änderungsrate
  ▪ Parametervariationen in Funktionsgleichung und Funktionsgraph
  ▪ Modellierung von Sachproblemen
  ▪ Geradengleichungen aus zwei Punkten bestimmen, in einfachen Fällen hilfsmittelfrei
  ▪ Ausgleichsgeraden zeichnerisch finden
  ▪ Ausgleichsgeraden mithilfe des Regressionsmoduls oder Parametervariation bestimmen
• lineare Gleichungen lösen
  ▪ Lösen durch Probieren und Rückwärtsarbeiten
  ▪ Lösen einfacher linearer Gleichungen hilfsmittelfrei
  ▪ Lösen komplexer linearer Gleichungen mit digitalen Mathematikwerkzeugen
• lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen aufstellen und lösen
  ▪ Sachprobleme modellieren
  ▪ Bezug LGS und Graph, auch im Hinblick auf die Lösbarkeit
  ▪ Lösen einfacher LGS graphisch und mit Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren
  ▪ Lösen komplexer LGS mit digitalen Mathematikwerkzeugen

Fakultative Erweiterungen: —
Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche: Funktionaler Zusammenhang
Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge: CAS zum Lösen von Gleichungen und LGS; Regressionsmodul

Lernbereich: Entdeckungen an rechtwinkligen Dreiecken

Intentionen

Bei vertieften Untersuchungen an rechtwinkligen Dreiecken bieten sich vielfältige Möglichkeiten zum Argumentieren im Sinne von Begründen. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse ermöglichen Berechnungen in komplexeren Figuren.

Mithilfe der Sätze von Thales und Pythagoras und der trigonometrischen Beziehungen an rechtwinkligen Dreiecken werden unbekannte Streckenlängen und Winkelgrößen sowohl bei innermathematischen Problemen als auch bei Sachproblemen bestimmt.

Das Wurzelziehen wird als Umkehroperation des Quadrierens eingeführt. Dieses naive Verständnis von Wurzeln wird bei der Berechnung von Streckenlängen angewendet. Wurzelgesetze werden für einfache Termumformungen verwendet.

Kenntnisse über Ähnlichkeit bei geradlinig begrenzten Figuren werden durch die trigonometrischen Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck erweitert.

Mit Quadratwurzeln, Sinus-, Kosinus- und Tangenswerten wird gerechnet, ohne deren Irrationalität zu thematisieren.

Kern

- Satz des Thales begründen und anwenden
- Satz des Pythagoras begründen und anwenden
- mit Wurzeln umgehen
  - Wurzelziehen als Umkehroperation
  - Rechengesetze exemplarisch begründen
  - Anwendung zur Streckenberechnung
- trigonometrische Beziehungen identifizieren und nutzen
  - Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken mit Sinus, Kosinus, Tangens
  - Tangens als Steigungsmaß

Fakultative Erweiterungen:

Höhensatz; Kathetensatz; Berechnungen an allgemeinen Dreiecken

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Zahlen und Operationen; Größen und Messen

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:

CAS zur Lösung von Gleichungen; DGS zur Exploration

3.3.3 Lernbereiche für den Doppelschuljahrgang 9 und 10

Lernbereich: Rückwärtsschlüsse in der Stochastik

Intentionen

Durch Daten können Wahrscheinlichkeiten auch indirekt ermittelt werden.

Zweistufige Zufallsexperimente mit zwei Merkmalen werden durch Baumdiagramme und Vierfeldertafeln übersichtlich dargestellt. Beide Darstellungen fördern auf unterschiedliche Weise die Einsicht. Die Schülerinnen und Schüler erfahren, welche überraschenden Phänomene bei zweistufigen Zufallsexperimenten mit zwei Merkmalen auftreten können und welche Schlüsse man aus den Daten ziehen kann.

Insbesondere lassen sich aus den Übergangswahrscheinlichkeiten beider Stufen und den Enddaten weitere interessierende Wahrscheinlichkeiten ermitteln („Rückwärtsschlüsse“).

Es empfiehlt sich, möglichst lange mit absoluten Häufigkeiten zu arbeiten, weil dadurch die Sachlage veranschaulicht und deshalb das Verständnis sehr gefördert wird. Die interessierende Wahrscheinlichkeit erscheint als Quotient „Anzahl der günstigen Fälle“ durch „Anzahl der möglichen Fälle“. Dabei wird die Variabilität der zu erwartenden Daten weiterhin thematisiert.

Kern

- zweistufige Zufallsexperimente mit zwei unterschiedlichen Merkmalen darstellen
  - Einträge in Baumdiagramm und Vierfeldertafel vervollständigen
  - zwischen diesen Darstellungen wechseln
- Wahrscheinlichkeiten durch Rückwärtsschlüsse ermitteln und interpretieren

Fakultative Erweiterungen:

Einheitsquadrat zur Visualisierung; iteratives Lernen aus Erfahrung; ausgewählte funktionale Zusammenhänge; Veranschaulichung der Variabilität durch Simulationen

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:
Daten und Zufall

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:
—

Lernbereich: Quadratische Zusammenhänge
Intentionen Ausgehend von realitätsnahen Problemstellungen wie z. B. Optimierungsproblemen lernen die Schülerinnen und Schüler quadratische Funktionen sowie deren Gleichungen in allgemeiner und faktorisierter Form kennen. Durch Parametervariation werden die Auswirkungen der Parameter auf das Aussehen des Graphen untersucht. Die Zusammenführung der Ergebnisse ermöglicht eine Charakterisierung unter den Gesichtspunkten Streckung, Öffnung, Symmetrie, Scheitelpunkt, Nullstellen. Insbesondere wird der Zusammenhang zwischen Lage der Nullstellen und x-Koordinate des Scheitelpunktes deutlich. Im Anschluss daran erfolgt eine Analyse der Scheitelpunktform. Funktionales Denken, graphisches Vorstellungsvermögen und Termstrukturerkennung ergänzen sich. Ein vertieftes Verständnis wird durch den Darstellungswechsel Gleichung – Graph – Tabelle gefördert. Das Wissen um diese Zusammenhänge erleichtert es, in einfachen Fällen ohne Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge zwischen faktorisierter Form und Scheitelpunktform sowie allgemeiner Form zu wechseln und quadratische Gleichungen zu lösen. Die quadratische Ergänzung bzw. die p-q-Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen wird mit den entsprechenden (graphischen) Eigenschaften verknüpft und somit als sinnvolle Strategie erfahren. Für die Lösung quadratischer Gleichungen in nicht-einfachen Fällen stehen digitale Mathematikwerkzeuge zur Verfügung. Die Schülerinnen und Schüler verwenden quadratische Funktionen bei der Modellierung in verschiedenen Sachkontexten. Wie bei den linearen Zusammenhängen werden auch hier die Grenzen der Modellierung aufgezeigt. Die Nutzung des Regressionsmoduls ermöglicht es, durch Daten dargestellte Zusammenhänge zu modellieren. Die Parabel wird als Ortslinie betrachtet, um so neben der funktionalen eine weitere Deutung zu ermöglichen. Dazu wird entweder aus der funktionalen Darstellung die Ortslinieneigenschaft entwickelt oder umgekehrt.

Kern
• quadratische Funktionen untersuchen - Parametervariation
  ▪ Zusammenhang von Funktionsgleichung und -graph für $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
  ▪ Zusammenhang von Funktionsgleichung und -graph für $f(x) = a \cdot (x - m) \cdot (x - n)$
  ▪ Zusammenhang von Funktionsgleichung und -graph für $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$
  ▪ Wechsel zwischen den Formen
  ▪ hilfsmittelfreies Zeichnen von Parabeln
• Quadratische Gleichungen
  ▪ Verknüpfung der Lösung mit den Eigenschaften des Graphen und der Struktur des Terms
  ▪ $x^2 + p \cdot x + q = 0$, $a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$, $a \cdot x^2 + c = 0$ und $a \cdot (x - d)^2 + e = 0$ lösen, in einfachen Fällen auch hilfsmittelfrei
  ▪ $x^2 + p \cdot x = 0$ und $x^2 + q = 0$ hilfsmittelfrei lösen
• quadratische Zusammenhänge modellieren
  ▪ Optimierungsprobleme und Nullstellensuche
  ▪ Ausgleichsparabeln mithilfe des Regressionsmoduls oder Parametervariation bestimmen
• Parabel als Ort aller Punkte, die zu einem Punkt und zu einer Geraden gleichen Abstand haben

Fakultative Erweiterungen: —
Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche: Zahlen und Operationen; Raum und Form; Funktionaler Zusammenhang
Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge: CAS zum Lösen quadratischer Gleichungen; Regressionsmodul

Lernbereich: Kreis- und Körperberechnungen

Intentionen

Es werden Körper und Figuren berechnet, deren Maßzahlen durch Approximation zu bestimmen sind.

Der Umfang oder der Flächeninhalt des Kreises wird durch ein geeignetes Näherungsverfahren bestimmt. Ausgehend von trigonometrischen Beziehungen kann die Annäherung durch regelmäßige n-Ecke einfach und zeitökonomisch gestaltet werden. Es reicht, die Annäherung von innen oder von außen vorzunehmen.

Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass zu Flächeninhalt und Umfang des Kreises dieselbe Kreiszahl π gehört.

Formeln für Bogenlängen und Kreisausschnitte werden exemplarisch entwickelt.

Die Formeln für das Volumen und den Oberflächeninhalt von Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel werden zu Berechnungen verwendet, die Begründung wird aber nicht gefordert. Netze und Schrägbilder werden zur Visualisierung genutzt.

Vor dem Berechnen werden die zu bestimmenden Maßzahlen geschätzt; die Schätzwerte werden mit den berechneten Werten verglichen.

Kern

- Flächeninhalt und Umfang des Kreises ermitteln
  - Weg zur Kreiszahl π
  - Flächeninhalt und Umfang schätzen und berechnen
  - Bogenlänge und Kreisausschnitt
  - Bogenmaß
- Maßzahlen ausgewählter Körper schätzen und berechnen
  - Oberflächeninhalt und Volumen des geraden Zylinders
  - Oberflächeninhalt und Volumen der geraden Pyramide und des geraden Kegels
  - Oberflächeninhalt und Volumen der Kugel

Fakultative Erweiterungen:

Weg zum Volumen von Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel;

Weg zum Oberflächeninhalt von Kegel und Kugel

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:
Größen und Messen

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:
abhängig vom gewählten Näherungsverfahren; CAS zur Lösung von Gleichungen

Lernbereich: Funktionen mit Potenzen
Intentionen Die leitenden Fragestellungen bei der Untersuchung der Auswirkungen von Parametervariationen auf Funktionsgraphen und Funktionsgleichungen, die den Schülerinnen und Schülern von den linearen und quadratischen Funktionen bekannt sind, werden hier auf Funktionen mit Potenzen übertragen. Ein vertieftes Verständnis wird durch den Darstellungswechsel Gleichung – Graph – Tabelle gefördert. Die Schülerinnen und Schüler sollen die Bedeutung der Parameter erläutern und insbesondere die Graphen der durch f mit $f(x) = x^n$ für ganzzahlige n und g mit $g(x) = b^x$ für positive b definierten Funktionen zeichnen können. Es werden exponentielle Wachstums- und Abnahmeprozesse modelliert, die sich durch $f(x) = a \cdot b^x$ beschreiben lassen. Die Potenzrechengesetze werden genutzt, um Erkenntnisse über die Funktionen oder einen zugehörigen Sachzusammenhang zu gewinnen. Der Logarithmus wird nur als Sprechweise für die Lösung der Gleichung $b^x = a$ eingeführt und höhere Wurzeln werden als Sprechweise für die Lösung der Gleichung $x^a = b$ genutzt. Beim Einsatz von CAS zur Lösung komplexerer Gleichungen ist das Verständnis der Rechneranzeige sicherzustellen.

Kern
• Funktionen mit Potenzen untersuchen - Parametervariation
  ▪ hilfsmittelfreies Skizzieren der Graphen zu $f(x) = x^n$ für ganzzahlige n und $g(x) = b^x$ für $b > 0$
  ▪ Zusammenhang von Funktionsgleichung und -graph für $f(x) = (x-b)^n + c$
  ▪ Zusammenhang von Funktionsgleichung und -graph für $f(x) = a \cdot b^x + c$
• exponentielle Wachstums- und Abnahmeprozesse modellieren
  ▪ Sachsituationen modellieren
  ▪ Funktionsgleichungen aus zwei Punkten bestimmen, in einfachen Fällen hilfsmittelfrei
  ▪ Ausgleichsfunktionen mithilfe des Regressionsmoduls oder Parametervariation bestimmen
  ▪ lineare und exponentielle Prozesse voneinander abgrenzen
• mit Potenzen rechnen
  ▪ Rechengesetze exemplarisch begründen
  ▪ Gleichungen umformen und lösen, in einfachen Fällen auch hilfsmittelfrei

Fakultative Erweiterungen: Zusammenhang von Funktionsgleichung und -graph für $f(x) = a \cdot (x-b)^n + c$; iterative und rekursive Modellierung von Wachstums- und Abnahmeprozessen; begrenztes Wachstum
Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche: Zahlen und Operationen; Funktionaler Zusammenhang
Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge: CAS zum Lösen von Gleichungen; Regressionsmodul

Lernbereich: Beschreibende Statistik

Intentionen

Daten lassen sich auf unterschiedliche Weisen beschreiben.

Datensätze zu Sachkontexten werden durch Lage- und Streumaße charakterisiert. Dabei werden die Einsatzbereiche der Lagemaße arithmetisches Mittel und Median sowie die Einsatzbereiche der Streumaße Spannweite und empirische Standardabweichung thematisiert. Unterschiedliche Lage- und Streumaße ermöglichen unterschiedliche Aussagen. Die empirische Standardabweichung bereitet den analogen Begriff bei der Wahrscheinlichkeitsverteilung in der gymnasialen Oberstufe vor. Mit Boxplots lassen sich unterschiedliche Häufigkeitsverteilungen übersichtlich vergleichen.

Kern

- Datensätze durch Lage- und Streumaße charakterisieren
  - Median und arithmetisches Mittel unterscheiden
  - Empirische Standardabweichung und Spannweite unterscheiden
- Boxplots darstellen und interpretieren
  - Boxplots als Visualisierung der Unterschiede zwischen Häufigkeitsverteilungen
  - Interpretation der Boxplots bei Datensätzen zu Sachkontexten

Fakultative Erweiterungen:

formale Beschreibung von Median oder Quartilen; Quantile

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Daten und Zufall

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:

Tabellenkalkulation zur Darstellung und Berechnung

Lernbereich: Periodische Zusammenhänge

Intentionen

Ausgehend von den trigonometrischen Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck wird am Einheitskreis die Länge der Gegenkathete in Abhängigkeit vom Winkel als Funktion gedeutet.

Die an den linearen und quadratischen, Potenz- sowie Exponentialfunktionen gewonnenen Erkenntnisse über Parametervariationen werden hier übertragen und um die Streckung bzw. Stauchung entlang der Rechtsachse ergänzt. Ein vertieftes Verständnis wird durch den Darstellungswechsel Gleichung – Graph – Tabelle gefördert.

Bei der Modellierung können die Schülerinnen und Schüler erstmalig in der Realität auftretende periodische Abläufe (Ebbe und Flut, Temperaturentwicklung im Laufe eines Tages/eines Jahres, Höhe des Sonnenstands etc.) mathematisch erfassen.

Das Lösen der auftretenden Gleichungen erfolgt mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge, wobei insbesondere auf eine angemessene Darstellung der Lösung im Hinblick auf die Periodizität der Funktion und auf die sachangemessene Wahl des Arguments geachtet wird.

Kern

- Sinus- und Kosinusfunktion als periodische Funktion
  - Definition am Einheitskreis
  - Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion zum Graphen der Kosinusfunktion
  - Bogenmaß
- Sinusfunktion untersuchen - Parametervariation
  - Zusammenhang von Funktionsgleichung und -graph für $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$
  - einfache Funktionsgraphen hilfsmittelfrei skizzieren
  - periodische Zusammenhänge modellieren

Fakultative Erweiterungen:

—

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Funktionaler Zusammenhang

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:

DGS zur Visualisierung

Lernbereich: Näherungsverfahren als Grenzprozesse

Intentionen

Zahlen können durch Grenzprozesse beschrieben werden.

In diesem Lernbereich werden einige früher unterrichtete Inhalte, die bisher eher naiv verstanden wurden und bei denen Grenzprozesse eine wichtige Rolle spielen, vertieft und neu strukturiert.

Dabei wird jetzt einerseits die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterungen begründet und andererseits der Grenzwert als eine Zahl eingeführt, der man sich mit einem Näherungsverfahren beliebig dicht annähert. Ziel ist ein verständiger und nachhaltiger Umgang mit Grenzprozessen, der sich auf die Anschauung gründet. Aus diesem Grund sollte auch die Limes-Schreibweise möglichst spät eingeführt werden.

Bisher wurde mit Wurzeltermen naiv gerechnet. Jetzt wird die Irrationalität ausgewählter Quadratwurzeln exemplarisch behandelt und Quadratwurzeln werden (etwa durch das Heron-Verfahren) durch einen Grenzprozess angenähert.

Die frühere Erfahrung, dass es auch rationale Zahlen ohne eindeutige Darstellung gibt, wird hier aufgegriffen und die Identität $0,\overline{9} = 1$ nun als Ergebnis eines Grenzprozesses gedeutet.

Der zur Kreiszahl π führende Grenzprozess wird nun als solcher identifiziert.

Auch die Frage nach dem Grenzverhalten des Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ festigt exemplarisch die Vorstellungen über Grenzprozesse.

Die Überlegungen zu Grenzprozessen bereiten die Argumentationsstrukturen der Analysis vor: Dadurch wird der spätere Übergang sowohl von mittleren zu lokalen Änderungsraten als auch die Grundidee der Integralrechung anschaulich und verständlich.

Kern

- Gemeinsamkeiten und Unterschiede ausgewählter Grenzprozesse beschreiben
  - ein Verfahren zur Annäherung an irrationale Quadratwurzeln
  - die Identität $0,\overline{9} = 1$ als Grenzprozess
  - die Kreiszahl π als Ergebnis eines Grenzprozesses
  - Grenzverhalten des Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{x}$
- Zahlbereichserweiterungen erläutern
  - eine exemplarische Irrationalitätsbegründung
  - Erweiterung der Zahlbereiche zu den reellen Zahlen
  - Rückblick auf frühere Zahlbereichserweiterungen

Fakultative Erweiterungen:

Grenzverhalten der Graphen von f und g mit $f(x) = a \pm \frac{b}{x}$ und $g(x) = a \cdot b^x; b > 0$;

Grenzprozesse beim Pyramidenvolumen, bei der Kegelmantelfläche und bei der Kugel

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Zahlen und Operationen

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:

abhängig vom gewählten Näherungsverfahren

Lernbereich: Änderungsraten

Intentionen

Grenzprozesse spielen auch bei der Untersuchung von Graphen und bei der Behandlung von Sachproblemen häufig eine wesentliche Rolle.

Mittlere und lokale Änderungsraten werden in unterschiedlichen Sachkontexten bestimmt. Die Sekanten- und Tangentensteigungen werden als mittlere und lokale Änderungsraten gedeutet. Ein vertieftes Verständnis wird durch den Darstellungswechsel Gleichung – Graph – Tabelle gefördert.

Die bei der Bestimmung der lokalen Änderungsraten auftretenden Grenzprozesse wurden im Lernbereich „Näherungsverfahren als Grenzprozesse“ vorbereitet; sie werden ohne Konvergenzkriterien beschrieben. Ziel ist ein verständiger Umgang mit Grenzprozessen, der sich auf die Anschauung gründet. Das spiegelt sich in der Fachsprache wider, die auch auf die im Lernbereich „Näherungsverfahren als Grenzprozesse“ begründete Limes-Schreibweise zurückgreift.

Die Potenzfunktionen werden zu den Polynomfunktionen erweitert. Deren Graphen werden unter Verwendung der Begriffe Symmetrie, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte beschrieben; graphisches Ableiten und seine Umkehrung werden thematisiert.

Der kritische Umgang mit Graphen kann zu der Frage führen, ob der Graph wirklich den wesentlichen Gehalt der Funktionsvorschrift wiedergibt und ob weitere Eigenschaften vorliegen; dies ist ein Motiv, Null-, Extrem- und Wendestellen kriterienorientiert zu beschreiben.

Notwendige und hinreichende Kriterien für Extremstellen sowie das notwendige Kriterium für Wendestellen werden anschaulich durch Betrachtung der Graphen zur Ausgangsfunktion und zu den Ableitungsfunktionen gewonnen; die kritische Betrachtung der Kriterien erfolgt nicht mehr in diesem Lernbereich. Extrempunkte finden ihre Anwendung bei Optimierungsproblemen.

Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ wird mit Hilfe des Differenzenquotienten abgeleitet. Die Begründung für die Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion kann graphisch erfolgen.

Kern

- mittlere und lokale Änderungsraten bestimmen
- Tangentensteigung als lokale Änderungsrate bestimmen
  - die Ableitung an einer Stelle
  - die Ableitung als Funktion
  - Ableitungsregeln
- Graphen zu Polynomfunktionen untersuchen
  - Aussagen über den globalen Verlauf und die Symmetrie
  - Erforderlichkeit von Untersuchungen möglicher Null-, Extrem- und Wendestellen
- Zusammenhang zwischen Ausgangs- und Ableitungsfunktion klären
  - Graphen und Ableitungsgraphen graphisch auseinander entwickeln
  - Kriterien für Extrema und Wendepunkte
- Optimierungsprobleme
- die Funktionen f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $f(x) = \sin(x)$ sowie $f(x) = \cos(x)$ ableiten

Fakultative Erweiterungen:

—

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Funktionaler Zusammenhang

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:

DGS oder Tabellenkalkulation zur Exploration; CAS zur Berechnung, Kontrolle, Exploration oder als Tutor

4 Leistungsfeststellung und Leistungsbewertung

Leistungen im Unterricht sind in allen Kompetenzbereichen festzustellen. Dabei ist zu bedenken, dass die sozialen und personalen Kompetenzen, die über das Fachliche hinausgehen, von den im Kerncurriculum formulierten erwarteten Kompetenzen nur in Ansätzen erfasst werden.

Der an Kompetenzerwerb orientierte Unterricht bietet den Schülerinnen und Schülern einerseits ausreichend Gelegenheiten, Problemlösungen zu erproben, andererseits fordert er den Kompetenznachweis in Leistungssituationen. Ein derartiger Unterricht schließt die Förderung der Fähigkeit zur Selbsteinschätzung der Leistung ein. In Lernsituationen dienen Fehler und Umwege den Schülerinnen und Schülern als Erkenntnismittel, den Lehrkräften geben sie Hinweise für die weitere Unterrichtsplanung. Das Erkennen von Fehlern und der produktive Umgang mit ihnen sind konstruktiver Teil des Lernprozesses. Für den weiteren Lernfortschritt ist es wichtig, bereits erworbene Kompetenzen herauszustellen und Schülerinnen und Schüler zum Weiterlernen zu ermutigen.

In Leistungs- und Überprüfungssituationen ist das Ziel, die Verfügbarkeit der erwarteten Kompetenzen nachzuweisen. Leistungsfeststellungen und Leistungsbewertungen geben den Schülerinnen und Schülern Rückmeldungen über die erworbenen Kompetenzen und den Lehrkräften Orientierung für notwendige Maßnahmen zur individuellen Förderung. Neben der kontinuierlichen Beobachtung der Schülerinnen und Schüler im Lernprozess und ihrer individuellen Lernfortschritte, die in der Dokumentation der individuellen Lernentwicklung erfasst werden, sind die Ergebnisse mündlicher, schriftlicher und anderer fachspezifischer Lernkontrollen zur Leistungsfeststellung heranzuziehen.

In Lernkontrollen werden überwiegend Kompetenzen überprüft, die im unmittelbar vorangegangenen Unterricht erworben werden konnten. Darüber hinaus sollen jedoch auch Problemstellungen einbezogen werden, die die Verfügbarkeit von Kompetenzen eines langfristig angelegten Kompetenzaufbaus überprüfen. In schriftlichen Lernkontrollen sind alle drei Anforderungsbereiche „Reproduzieren“, „Zusammenhänge herstellen“ sowie „Verallgemeinern und Reflektieren“ zu berücksichtigen. Der Schwerpunkt liegt dabei im Anforderungsbereich „Zusammenhänge herstellen“.

In schriftlichen Lernkontrollen ist auf einen verständigen Umgang mit mathematischen Verfahren zu achten. Dies gilt sowohl bei hilfsmittelfrei zu bearbeitenden Aufgaben als auch bei Aufgaben mit Verwendung von Hilfsmitteln (Formelsammlung, digitale Mathematikwerkzeuge).

Eine schriftliche Lernkontrolle wird in der Regel mit „ausreichend“ oder besser bewertet, wenn mindestens die Hälfte der erwarteten Leistung erbracht wurde. Der für „sehr gut“ bis „ausreichend“ vorgesehene Bereich sollte in annähernd gleich große Intervalle unterteilt werden. Liegt weniger als ein Fünftel der erwarteten Gesamtleistung vor, ist die schriftliche Lernkontrolle in der Regel mit „ungenügend“ zu beurteilen.

Festlegungen zur Anzahl der bewerteten schriftlichen Lernkontrollen trifft die Fachkonferenz auf der Grundlage der Vorgaben des Erlasses „Die Arbeit in den Schuljahrgängen 5 – 10 des Gymnasiums“ in der jeweils gültigen Fassung.

Die Ergebnisse schriftlicher Lernkontrollen und die sonstigen Leistungen, die sich aus mündlichen und anderen fachspezifischen Leistungen zusammensetzen, gehen zu etwa gleichen Teilen in die Zeugnisnote ein.

Zu mündlichen und anderen fachspezifischen Leistungen zählen z.B.:

- Beiträge zum Unterrichtsgespräch
- kurze mündliche oder schriftliche Überprüfungen (z. B. von Verfahren, Regeln und Routinen)
- Unterrichtsdokumentationen (z. B. Protokoll, Lernbegleitheft, Lerntagebuch, Portfolio)
- Anwenden fachspezifischer Methoden und Arbeitsweisen
- Präsentationen, auch mediengestützt (z. B. durch Einsatz von Multimedia, Plakat, Modell)
- Ergebnisse von Partner- oder Gruppenarbeiten und deren Darstellung
- Langzeitaufgaben und Projektdokumentationen
- freie Leistungsvergleiche (z. B. Schülerwettbewerbe)

Bei kooperativen Arbeitsformen sind sowohl die individuelle Leistung als auch die Gesamtleistung der Gruppe in die Bewertung einzubeziehen. So werden neben methodisch-strategischen auch die sozial-kommunikativen Leistungen angemessen berücksichtigt.

Die Grundsätze der Leistungsfeststellung und -bewertung müssen für Schülerinnen und Schüler sowie für die Erziehungsberechtigten transparent sein.

5 Aufgaben der Fachkonferenz

Die Fachkonferenz erarbeitet unter Beachtung der rechtlichen Grundlagen und der fachbezogenen Vorgaben des Kerncurriculums einen fachbezogenen schuleigenen Arbeitsplan (Fachcurriculum). Die Erstellung des Fachcurriculums ist ein Prozess.

Mit der regelmäßigen Überprüfung und Weiterentwicklung des Fachcurriculums trägt die Fachkonferenz zur Qualitätsentwicklung des Faches und zur Qualitätssicherung bei.

Die Fachkonferenz …

- legt die Themen bzw. die Struktur von Unterrichtseinheiten fest, die die Entwicklung der erwarteten Kompetenzen ermöglichen, und berücksichtigt dabei regionale Bezüge,
- legt die zeitliche Zuordnung innerhalb der Doppelschuljahrgänge fest,
- entwickelt Unterrichtskonzepte zur inneren Differenzierung,
- arbeitet fachübergreifende und fächerverbindende Anteile des Fachcurriculums heraus und stimmt diese mit den anderen Fachkonferenzen ab,
- legt Themen bzw. Unterrichtseinheiten für Wahlpflichtkurse in Abstimmung mit den schuleigenen Arbeitsplänen fest,
- entscheidet, welche Schulbücher und Unterrichtsmaterialien eingeführt werden sollen,
- trifft Absprachen zur einheitlichen Verwendung der Fachsprache und der fachbezogenen Hilfsmittel,
- trifft Absprachen über die Anzahl und Verteilung verbindlicher Lernkontrollen im Schuljahr,
- trifft Absprachen zur Konzeption und zur Bewertung von schriftlichen, mündlichen und fachspezifischen Leistungen und bestimmt deren Verhältnis bei der Festlegung der Zeugnisnote,
- wirkt mit bei der Erstellung des fächerübergreifenden Konzepts zur Berufsorientierung und Berufsbildung und greift das Konzept im Fachcurriculum auf,
- entwickelt ein fachbezogenes Konzept zum Einsatz von Medien im Zusammenhang mit dem schulinternen Mediencurriculum,
- wirkt mit bei der Entwicklung des Förderkonzepts der Schule und stimmt die erforderlichen Maßnahmen zur Umsetzung ab,
- initiiert die Nutzung außerschulischer Lernorte, die Teilnahme an Wettbewerben etc.,
- initiiert Beiträge des Faches zur Gestaltung des Schullebens (Ausstellungen, Projekttage etc.) und trägt zur Entwicklung des Schulprogramms bei,
- stimmt die fachbezogenen Arbeitspläne der Grundschule und der weiterführenden Schule ab,
- ermittelt Fortbildungsbedarfe innerhalb der Fachgruppe und entwickelt Fortbildungskonzepte für die Fachlehrkräfte.